Årg. 37:1 Mars 1954

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

FÖRSTA HÄFTET

Erik Ingelstam, Fysikaliska grundprinciper i Zernikes faskontrastmetod 1

Klas-Bertil Augustinsson, Enzymkemi II 14

Roland Kiessling, Hårdmetall, en viktig pulvermetallurgisk produkt 23

David F. Larsson, Ett talteoretiskt problem 30

Notiser: Torsten Wilner, Impulsförsök; Erik Walles, Newtons tredje rörelselag; Harald Magnusson, Kastparabeln; Björn Froste, Uppg. 5 specialmatematik, nov. 1953; Sven Hilding, Uppg. 8 latinlinjen nov. 1953; C. E. B., En studentuppg. och en triangelsats; Harry Hellström, Vätskors ångtryck; Bertil Englund, Elströmmens värmeverkningar; Paul Carlsson, Syntes av svavelsyra; G. Starck, En enkel gasometer 32

Aktuellt: Den totala solförmörkelsen den 30 juni 1954; Föreningen för matematisk-naturv. underv., årsmöte i jan. 1954; Den andra nordiska kongressen för matematik-, fysik- och kemilärare i Århus, Danmark, 3—6 aug. 1954; Industriens Upplysningstjänst inbjuder till sin nionde industrikurs 39

Bokanmälningar: se omslagets andra sida 43

Gradualavhandlingar: B. Stolt; B. Westerlund; T. Ganelius; M. Matell ... 59

Problemavdelning:

Matematiska problem (red. av S. Bågman) 65

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen januari 1954 69

Rättelse (74); Tidskrifter (75); Insänd litteratur (76); Författare i detta häfte (58).

Annonsörer: Almqvist & Wiksell; Rudolph Grave, Lindståhls Bokhandel; Norstedt & Söner (två annonssidor); Svenska Bokförlaget.

Pris pr år kr. 12:50 pr häfte kr. 3:50

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 12:50, pr häfte kr. 3:50. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Pärmar av grön klot à 3:—+20 öre i porto; varje pärm är avsedd för två årg.: 1—2, 3—4, t. o. m. 35—36.

Tidigare årg. Vänd Eder direkt till red. med en förfrågan. Av årg. 1—13 är flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14 (1931) t.o.m. 34 (1951) kr. 10:— för 35 (1952) och 36 (1953) kr. 12:50.

Red.-kommitté: professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, byrådirektör S. Comét, lektor Torsten Jönsson, lektor G. Starck, professor J. Tandberg och lektor A. Wahlgren. Redaktör och utgivare: C. E. Blom. Red. o. exp. Karlbergsv. 16, Stockholm.

Särtryck ur ELEMENTA:

1. A. Nordhult, De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna, kr. 2:—.
2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 2:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 2:—.
4. J. Tandberg, Om vinkelns tredelning. Slut.
5. G. Ljunggren, Gasskyddets kemi kr. 1:—.
6. S. Comét, Matrisräkning, kr. 2:—
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 2:—.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 2:—.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 2:—.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.
12. Karin Aurivillius, Analysvågen, kr. 2:40.
13. Uno Trägårdh, Primär- och sekundärelement, kr. 2:40.

Problemhäften för åren 1943—52 à kr. 1:20, för 1953 à kr. 1:40. Innehåll: Student- o. realex.uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.

Ökade tillverkningskostnader och utgifter för distribution och lagerhållning har nödvändiggjort den prishöjning på pärmar, en del tidigare årgångar och särtryck, som framgår av ovanstående förteckning. — De nya priserna för tidigare årg. tillämpas dock först fr. o. m. 1 april 1954.

Bokanmälningar: Hodge-Pedoe, Methods of Algebraic Geometry; Milne, Numerical Solution of Differential Equations; Herdan, Small Particle Statistics; Bourbaki, Éléments de mathématique; Schubert-Fitting, Mathematische Mussestunden; Northcott, Ideal Theory; Sjöstrand, Differential- och integralkalkyl; Alfsen-Skjulstad-Sollesnes, Matematikk for språklinjene; Experimental Nuclear Physics; Rocard, Thermodynamique; Rouse-Howe, Basic Mechanics of Fluids; Kittel, Introduction to Solid State Physics; Gronau, Physikalisches Experimentierbuch; Almkvist-Knave, Laborationer III; Lippmann, Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik; Traité de chemie organique, Tome XX et XXII; Jander-Jahr, Massanalyse; Börner, Welcher Stein ist das?; Böös-Lundberg-Leden, Kemi för gymnasiet; Englund, Kemi som hobby; Willstaedt-Virgin-Myrbäck, Kemi med biokemi; Ekman-Sandström, Lärobok i organisk kemi; Romig, Binomial Tables 43

Bilaga: Lindståhls bokhandel

nytt

HJALMAR NILSSON - FRITS WIGFORSS

• Geometri och Planimetri

I den välkända serien *Matematikens element* har nu utkommit en ny del, Geometri och planimetri. Den har samma förtjänster som föregångarna i serien (Aritmetik och Algebra I):

intresseväckande framställning,
fyndiga exempel,
en mängd förklarande textfigurer.

Boken är närmast avsedd för seminarierna men kan med fördel användas vid repetitionen av geometri och planimetri i realgymnasiet och å gymnasiets allmänna linje.

Pris 12:50

STIG HJALMARS

• Teoretisk fysik

För studerande med grundliga kunskaper bl. a. experimentell och deskriptiv fysik ger docenten vid Stockholms högskola, Stig Hjalmars, grundprinciperna av den teoretiska makrofysiken.

Ingår i förlagets serie AKADEMISKA HANDBÖCKER

Pris 28:—

GUNNAR FISCHER

• Lärobok i hygien

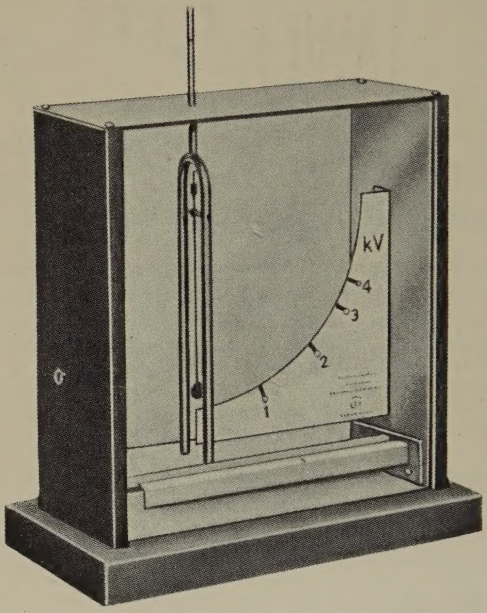
Omarbetad upplaga av *Allmän hälsovård*, del I
En modern lärobok, som ger en översikt av de hygieniska problem som dagens samhälle ställs inför, skildrad av en av vårt lands mest sakkunnige hygieniker.

Pris 28:—

Ingår i förlagets serie AKADEMISKA HANDBÖCKER

Almqvist & Wiksell STOCKHOLM 1, BOX 159, POSTGIRO 758

STATISK VOLTMETER



Ett nytt, stabilt instrument med mätområde 0–4 kV.

Materialet är ädelträ, plast och glas.

Vi leverera de apparater som behövs för undervisningen i

Optik
optiska bänkar, prismor m. m.

Akustik
vågrörelseapparater, stämgafflar m. m.

Mekanik
Atwoods fallmaskin, lutande plan m. m.

Värmelära
exempelvis termostaplar

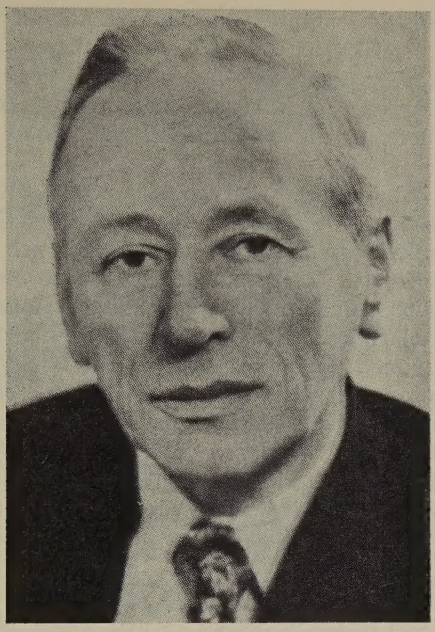
El. lära
bandgeneratorer, motorgeneratorer m. m.

Dessutom föra vi mätinstrument av alla slag.

RUDOLPH GRAVE AB

Malmskillnadsg. 48 C Stockholm 3
Box 3082 Tel. 23 37 80

Malmgatan 10 Malmö 6
Box 6058 Tel. 381 25



Frits Zernike

Fysikaliska grundprinciper i Zernikes faskontrastmetod

Av docent Erik Ingelstam, Stockholm

Frits Zernike tillerkändes Nobelpriset i fysik för år 1953 »för den av honom angivna faskontrastmetoden, särskilt för hans uppfinning av faskontrastmikroskopet». Principen kan sägas vara ett senkommet bidrag till den fysikaliska optiken, eftersom den skulle ha kunnat deduceras redan för 50 eller 30 år sedan ur de grundläggande lagar för bildalstringen, som Abbe och Lord Rayleigh hade skapat. Man förbiså dock denna möjlighet till ny och värdefull information om ett optiskt objekt, och historiken om hur synliggörande och mätning av fasskillnader gjordes aktuell är intressant ur många synpunkter.

Zernikes insats, för ungefär 20 år sedan, kom också vid en fruktbar tidpunkt. Å ena sidan är tekniken med tunna hinnor, en viktig förutsättning för flera konstruktioner, stadd i god utveckling tack vare

vakuumförångningen. Å andra sidan söker man inom viktiga grenar av den fysikaliska, kemiska och biologiska forskningen ivrigt efter metoder för mätning av vad som kan översättas i ljusfaser, nämligen små tjocklekssskillnader eller brytningsindexdifferenser. Ibland kunna sådana objekt undersökas med mikroskop och ibland med andra fasinstrument.

Tyvärr är en del av litteraturen om faskontrast ganska svårtillgänglig även för fysikerna. De flesta av Zernikes efterföljare ha utnyttjat metoden inom mikroskopin, och den matematiska och tekniska vidareutvecklingen har oftast knutits till den geometri som passar härför, särskilt den ringformade s. k. Köhlerbelysningen. Antagandena ha ofta gjorts rätt speciella och diffraktionsgeometrin har formulerats tvådimensionellt i planet. Ibland har man därför tvingats att fysikaliskt tyda rätt komplicerade och icke explicit lösbara ekvationer, vilket man i regel icke gör utan särskild anledning.

Zernikes egna, mycket få arbeten[1] äro emellertid synnerligen innehållsrika och uttömmande. Han har valt den fruktbara matematiken, ibland endast antytt den, eftersom uttryckssättet är starkt koncentrerat. Metoden är en sinnrik kombination av några få i och för sig enkla och väl kända vågutbredningsfenomen. Den följande framställningen är ett försök att på ett mera direkt sätt låta Zernikes grundidé framträda, även om den är något färgad av den senare utvecklingen.

En översikt

Här behöver endast erinras om, att fas i en svängning mätes av den vinkel (här benämnd φ) som ingår i den sinus- eller cosinusfunktion som beskriver den. Svängningen $s=a\cos(\omega t+\varphi)$ är fasförskjuten med φ i förhållande till $s=a\cos\omega t$. Liksom i det bekväma förfaringssättet vid behandling av växelströmmar kan man låta svängningsutslaget utgöra den ena axelkomponenten, här x-komponenten, i ett visardiagram, fig. 1, och utgångsläget blir då riktfas. (När man räknar, gör man givetvis detta komplext med just dessa förutsättningar.) Har nu endera av två ljusstrålar, som äro enfärgade (samma λ, och $\omega=2\pi c/\lambda$) och kohärenta (samma tid t), gått en till beloppet Δ större optisk väglängd än den andra, så motsvarar detta, eftersom väglängden λ motsvarar fasskillnaden 2π med ombytt tecken, att dess svängning är fasförskjuten $\varphi=-2\pi\Delta/\lambda$ relativt den andra.

Vid ett vanligt interferensförsök, t. ex. vid en luftkil i enfärgat ljus, fig. 2, sammansätter man ju lämpligen amplituderna av strålarna 1 och 2 vektoriellt för att få resultanten, på samma sätt som man adderar

[1] Denna uppsats har ej kunnat belastas med referenser, men förf. anvisar gärna sådana. Se även lista i Kosmos 29 (1951), 211.

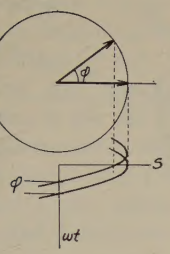


Fig. 1. Ett svängningsvisardiagram, där radien betyder maximiamplituden och själva svängningsförloppen vid åskådliggjorda av visarprojektionerna, cos-kurvorna, i ωt-diagrammet. Visarna rotera 1 varv på 1 svängningsperiod, men man låter diagrammet betyda en ögonblicksbild.

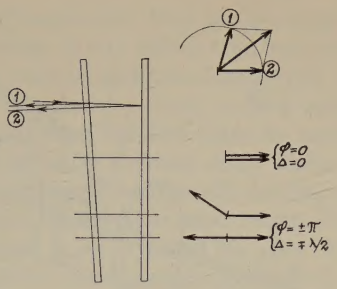


Fig. 2. Ett välkänt interferensfall, där den resulterande amplituden erhålles genom visaraddition av de lika starka svängningarna 1 och 2. Vid två markerade strålställen äro visarna i konjunktion (maximalt ljus) och opposition (fullt mörker).

två fasförskjutna växelströmmar. Utan dessa översiktliga vektorhjälpmedel inom den fysikaliska optiken bli räkningarna på mera komplicerade fall onödigt svåröverskådliga. Vid de nedre strålställena i fig. 2 se vi ju direkt konjunktionen och oppositionen hos visarna rid maximalt ljus och fullt mörker i detta fall.

Ett fasobjekt, sådant som intresserar oss i faskontrastmikroskopen, är en fullt genomskinlig platta, genom vilket ljuset passerar men vars olika delar ge vågen olika fasskillnader. De motsvarande Δ kunna bero på skillnader i tjocklek (z), dvs. $\Delta = z_1 - z_2$, eller på brytningsindexskillnader mellan ämnen utfyllande samma tjocklek $z : \Delta = z(n_1 - n_2)$, eller på kombinationer av båda orsakerna. Fig. 3 a ger en anordning för avbildning av en sådan platta. Ljuskällan S antages vara nära punktformig och den kollimerande linsen L_1 liksom alla de övriga linserna ideala, dvs. aberrationsfria. Fasobjektet passeras alltså av parallellt ljus, och linsen L_2 bryter samman ljuset från ljuskällan i diffraktionsplanet (d-planet), där man får den geometrisk-optiska bilden av ljuskällan. I närheten av d-planet finns en ytterligare lins L_3 som avbildar objektplanet i bildplanet. För resonemanget i fortsättningen behöva vi endast betrakta objektplanet, d-planet och bildplanet.

Det är i d-planet det ingrepp sker som skall ge oss faskontrast: där insättes en Zernikeplatta D (fasplatta, d-platta). I fig. 3 b är, motsvarande principskissen fig. 3 a, ett faskontrastmikroskop skisserat. Ljuskällan är, av senare behandlade skäl, lämpligen men ej nödvändigtvis, ringformad (Köhlerbelysning, här sedd i snitt) och d-

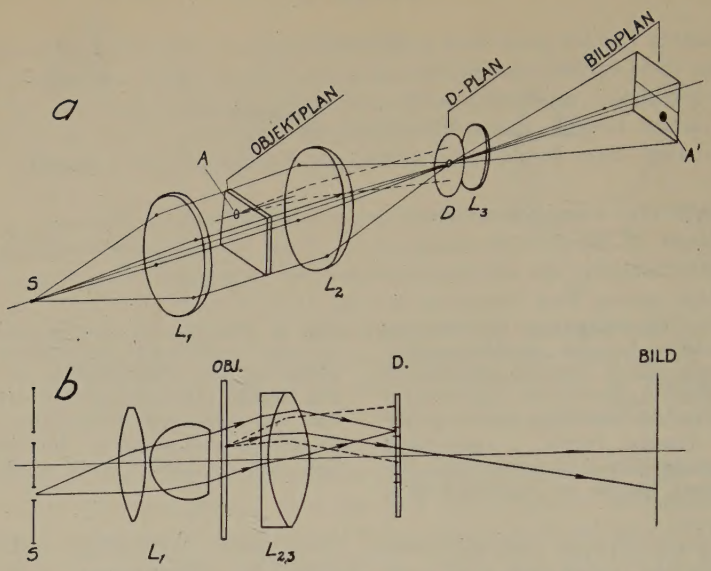


Fig. 3. *a.* principskiss av faskontrastavbildning, innehållande dess viktigaste element, *b.* snitt av belysnings- och objektivdelen hos ett faskontrastmikroskop.

plattan utformad med en motsvarande ring. Linserna L_2 och L_3 äro sammantagna till mikroskopobjektivet $L_{2,3}$, vilket även mycket ofta sker i andra tillämpningar och icke inverkar på det teoretiska resonemanget. Bildplanet är det av mikroskopobjektivet alstrade, och vid betraktandet sammanfaller det med okularets brännplan. D-planet är fortfarande det med ljuskällan konjugerade planet.

Ändamålet med faskontrast är att göra de från genomsnittet i objektet fasavvikande detaljerna synliga i bilden genom att bringa dem att avvika i intensitet. I objektplanet fig. 3 a är schematiskt antydd en mindre zon, som t. ex. antages vara något tjockare än plattan i övrigt (den är t. ex. belagd med ett monomolekylärt skikt av en fettsyra). Den skall i bildplanet framträda som mörk på ljus botten, vid A'. Förutsättningen för att detta skall kunna realiseras är inte bara att den avviker i fas utan att zonen på grund av att den är liten avböjer, diffrangerar, ljuset så att det går annan väg genom det optiska systemet än bakgrundens ljus. Schematiskt är med prickade linjer antytt, att vågfronten ut från zonen vidgar sig på grund av denna diffraktion. I d-planet är diffraktionsgeometrin enligt det s. k. Fraunhoferska fallet renodlat utbildad. Man brukar benämna det ljus som följer de här heldragna strålarna det *direkta* och det som mar-

keras av de prickade strålarna det *diffrangerade*. Man ser att vågorna då de gå genom d-planet äro åtminstone delvis skilda från varandra.

Vi gå i fortsättningen över till det enklare endimensionella fall, där faserna i objektet och fasgeometrin i d-planet endast variera utefter en riktning, dvs. där alla punkter utefter en vertikal linje ha samma egenskaper. S bör då utformas som en smal vertikal spalt. Fallet är också experimentellt lätt tillgängligt, eftersom intensitetsfördelningarna såväl i d-planet som i bildplanet kunna undersökas med fotomultiplikator med i ena leden utsträckt katod (t. ex. typ 931 A), eller ännu enklare med fotografering genom gråkil med kanten horisontell.

Den fasavvikande strimmans avbildning utan faskontrast

Det endimensionella typfall som vi vilja betrakta är det som består av en fasavvikande strimma i det i övrigt fasjämna fältet. Enligt fig. 4 kan en sådan strimma t. ex. vara en fåra i en glasplatta. Fallet kan lätt beräknas, i varje fall förhållandena fram till d-planet. Vi antaga, att fältets bredd är w och att strimmans bredd är endast $1/M$ därav, alltså w/M. Det förutsättes, att talet M inte är alltför litet, dvs. att strimman inte utgör mera än en liten bråkdel av fältet. Denna faktor M är väsentlig för bedömningen av metodens prestationsförmåga. För översiktlighetens skull anta vi i vårt resonemang vidare till en början, att φ endast utgör en liten bråkdel av varvet och att alltså den optiska vägskillnaden är liten i förhållande till ljusvåglängden, kanske endast något hundratal Å.

Denna sista förutsättning, som Zernike valde, icke för teorin som sådan men väl för sin framställning av formlerna, är fysikaliskt oväsentlig och skall senare återtagas. Den förekommer i kanske 95 % av all litteratur på området och har därför möjligen bundit fantasien.

Ljusfördelningen, närmare bestämt funktionerna för ljusamplituderna i d-planet, följer den mest kända av alla diffraktionsfigurer, den för rektangulära öppningar. Om vinkeln u enligt fig. 4 sätts som variabel (jfr vinkelspridningen hos de prickade strålarna fig. 3 a), så ges som bekant amplitudfunktionen av hela öppningsbredden w av funktionen $\sin(\pi w u/\lambda)/(\pi w u/\lambda) = \sin\beta/\beta$. Sinusvariationerna i amplitudförloppet i sidled, vilka förlöpa lineärt med utsträckningen i d-planet, eftersom dess breddkoordinat är $f \cdot u$, »dämpas ned» av nämnaren, så att den bekanta figuren, med ett mittmaximum och sidolober uppkommer. Den första nollpunkten på varje sida om mitten motsvarar det u för vilket sinus blir noll för första gången utanför origo, dvs. då $u = \lambda/w$, och det är praktiskt att kalla avståndet från origo till denna punkt en d-enhet. Denna enhets bredd, och därmed sidoutsträckningen av d-figuren, är alltså omvänt proportionell mot öppningens bredd w.

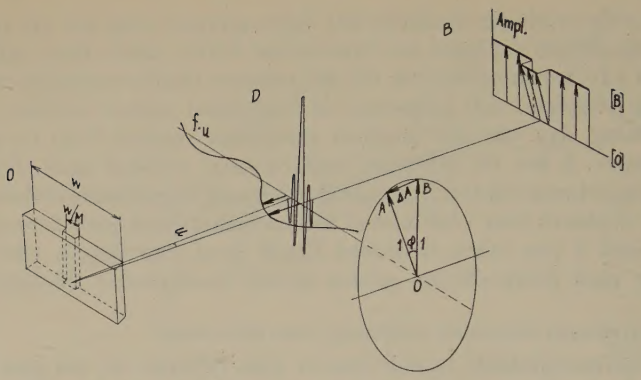


Fig. 4. Diffraktionsförhållandena vid avbildning *utan* faskontrast.

I regel kvadrerar man omedelbart denna funktion och får intensiteten $\sin^2\beta/\beta^2$, vilken egenskap hos figuren ju är det enda man kan iakttaga med ögat eller någon registrerande anordning. Men det är just amplituderna som i fortsättningen skola gå in i alla interferenser! Utefter den av våra kurvor i fig. 4, som motsvarar hela w och är ritad upprättstående, äro alla svängningar i samma fas, och den uppåtriktade vektorn OB i den bredvidstående cirkeln representerar summan av dessa amplituder.

Om vi sedan rikta uppmärksamheten på den fasavvikande strimman, så skulle en d-figur av den, om den vore ensam närvarande, bli likadan som den för hela bredden w men utbredd M gånger mera i sidled. En sådan kurva är tecknad liggande i fig. 4, och den representerar vad som tidigare kallats det diffrangerade ljuset. Men hur står detta ljus i fasrelation till den smalare d-figurens ljus, hela öppningens, det s. k. direkta ljuset? Allt ljus inom strimman skulle vara fasvridet vinkeln φ, och det har alltså i vektorcirkeln läget A. Själva korrektionen till det direkta ljuset, avvikelsen hos ljus inom strimman, representeras av den bredare d-figuren och i vektorcirkeln av skillnadsvektorn ΔA, *vilken är fasvriden 90°* i förhållande till den direkta vågen, och har den relativa storleken φ, ett förhållande som även direkt framgår av att för små vinklar $\cos(\omega t+\varphi)-\cos\omega t=-\varphi\sin\omega t=\varphi\cos(\omega t+90°)$ eller bättre $e^{i(\omega t+\varphi)}-e^{i\omega t}=i\varphi e^{i\omega t}$. Om man i nedre delen av fig. 1 vill rita in skillnadskurvan, så befinnes ju för små φ dess maximum ligga 90° före de båda subtraherade svängningarna. Det diffrangerade ljusets kurva har enligt detta också i fig. 4 ritats 90° vriden i rymden i förhållande till den stående kurvan, alltså liggande, detta för att

figuren i fortsättningen skall kunna användas för att åskådliggöra fasvridningar.

För vanlig bildalstring, vilket ju detta är, ägnar man i regel ingen uppmärksamhet åt d-planet, och det var Abbes stora insats att göra detta vid utformningen av mikroskopavbildningens teori. Därest emellertid bländare i d-planet eller vid närliggande linser inte nämnvärt skära av d-figurerna, vilket i så fall nedsätter upplösningsförmågan, så integreras åter vågorna samman till bildplanet, så att varje kontur och varje eventuellt förekommande absorberande detalj i objektplanet avbildas på vanligt sätt i bildplanet. För fasobjektet får man ingen intensitetsskillnad. Om fasobjektet är helt jämnt (strimman borta), så blir amplituden och fasen lika i hela bildfältet, ett påtagligt och enkelt exempel på Fouriers integralteorem eller det som i optiken brukar kallas Lummers sats. Denna formulerades på sin tid så: »Om alla diffraktionsspektra från ljuskällan kunna passera genom systemet utan att förändras, så blir bilden lika med objektet i struktur och fas.» Om som i vårt fall en del av objektet gör vågen fasavvikande, så betyder detta endast, att svängningarna vid bildplanet äro på motsvarande sätt fasavvikande, men amplituden är lika och amplitudkvadraten, dsv. intensiteten, likaså. Strimman är icke synlig. Detta har åskådliggjorts i fig. 4.

Den fasavvikande strimmans avbildning med faskontrast

I d-planet är alltså det s. k. direkta ljuset dels samlat i en inre zon i förhållande till det diffrangerade ljusets huvudpart, dels 90° fasförskjutet i förhållande till detta. Men då ligger Zernikes konstgrepp klart: sätt där in en d-platta som ger en relativ fasvridning av 90°, så kunna de båda ljusvågorna interferera med varandra. I fig. 5 synes hur detta sker. De prickade konturerna i vertikal led angiva, hur gränserna mellan d-plattans båda zoner lämpligen läggas i förhållande till d-figurerna. Vi låta den innefatta praktiskt taget hela det direkta ljusets d-figur (några d-enheter) och förutsätta först med Zernike, att M är så stort, att praktiskt taget *hela* d-figuren från strimman faller i den yttre zonen. I fig. 3 a visas hur plattan placeras vinkelrätt mot axeln. I vårt fall skall ju emellertid innerzonen icke som i denna fig. bestå av en fläck utan av en vertikalt utsträckt strimma. Den kan göras av en glasplatta, i vilken en fåra etsas, eller bättre inom vilken tjockleken ändras genom att ytterzonen genom förångning pålägges med t. ex. kryolit. »Stegets» höjd skall avpassas så att det motsvarar 90° fasförskjutning.

Ingreppet betyder, att det direkta ljuset i vår fig. »vrides fram» 90°, vilket är åskådliggjort så att figuren »vridits fram» 90° från sitt streckade till sitt heldragna läge. Detta motsvarar, att enhetsradien

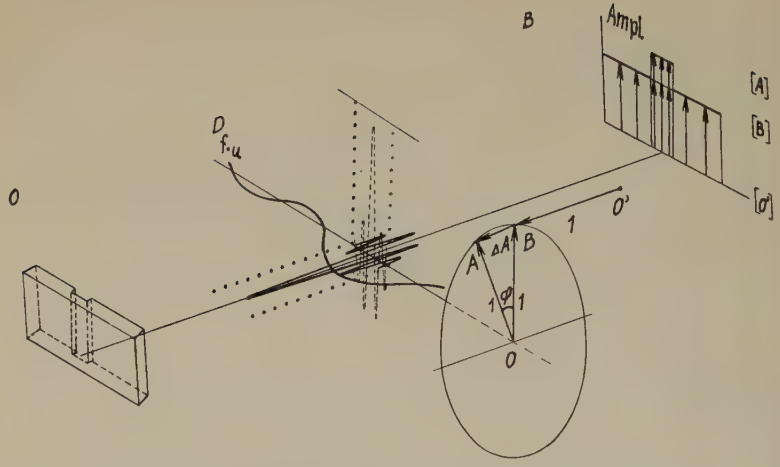


Fig. 5. Diffraktionsförhållandena *vid* faskontrast, åstadkommen genom en i d-planet ställd platta, vars överkant är antydd och vars zongränser markeras genom de vertikala prickarna.

i vektorcirkeln omvrides samma vinkel, vilket placerar den i det inritade läget med O′ som begynnelsepunkt (det är ju riktningen, ej placeringen, som är avgörande). Inom den geometriska bilden av strimman i bildplanet adderas nu direkt amplituderna från störvågen, och man får strimman att framstå ljus mot bakgrunden. (Positiv faskontrast enl. Zernike; en vridning −90°, lika naturlig, ger mörkare strimma i detta fall, negativ faskontrast.) Man bör direkt beakta diffraktionsteorins enkla sats, att platån vid [B] utgör restitutionen av hela objektplattan, förmedlad av den trånga d-figuren, och att den högre platån, vid [A], kommer från integralen av strimmans bredare d-bild, störvågen. För att öka kontrasten i bilden, dvs. förhållandet mellan störvågens och huvudvågens inverkan, kan man försvaga den senare, t. ex. genom absorption inom d-plattans innerzon, så att grundamplituden minskas och O′ i vektordiagrammet kommer närmare punkten B.

Faskontrastavbildningens störning, s. k. "halo"

På en punkt är den hittills förda teorin icke uttömmande. Uppkomsten av den konstanta platån i mittstrimman av bilden fig. 5 förutsätter, att allt diffrangerat ljus, »störvågens» ljus, ligger kvar i samma fas och sålunda oförändrat kommer med i integrationen. Här gäller den Lummerska satsen. Men man ser i fig. 5, att d-plattans innerzon nödvändigtvis skär av en mittdel av detta ljus. I fig. 6 åter-

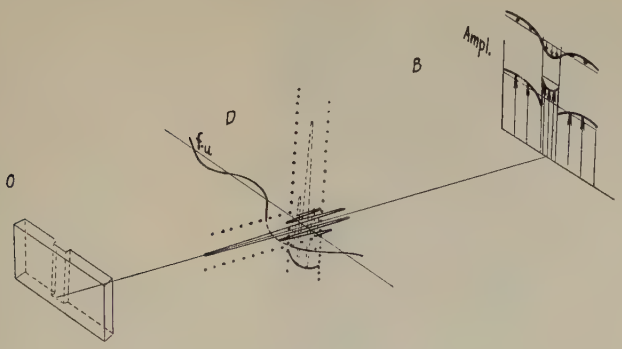


Fig. 6. Andraapproximationsteorin för faskontrast, förklarande uppkomsten av »halo».

ges det verkliga förhållandet. Den heldragna kurvan inom mittzonen representerar vad som vridits ned, och denna del inverkar ej på bilden, eftersom den, 90° i vinkel mot de övriga vektorerna, icke interfererar. Däremot betyder *frånvaron* av den numera streckade delen, att det tillkommer korrektionsbelopp vid interferenser i bildplanet.

Man ser omedelbart, att dessa korrektioner bli små om M är mycket stor (Zerniketeorin, förstaapproximationsteorin), dvs. om de fasavvikande detaljerna äro smala: då är nämligen den avskurna delen relativt sett liten. I andra approximationen, som är giltig även för ganska små M, kan man betrakta den avskurna mittloben som en enda rektangulär öppning med konstant amplitud, därmed utjämnande den något avtagande amplituden vid kanterna, och i detta fall få vi korrektionen lika med den omvända $\sin\beta/\beta$-kurva, som är separat inritad överst i bildplanet fig. 6, och vars utsträckning motsvarar vinkelfunktionen för d-plattans zonbredd. Man får i det här tecknade fallet ett maximum på varje sida, och mittminimet är superponerat på mittstrimman. Den exakta lösningen för ännu mindre M kan icke ges i explicit form, eftersom den bygger på integralsinusräkningar, och för små M saknar den intresse, eftersom faskontrastavbildningen alltmera upphör.

Andraapproximationens behandling ger allt fysikaliskt väsentligt, och Zernike nöjde sig också i sina uppsatser med några rader, där han antydde den fysikaliska orsaken till denna störning. Den är dock ytterst viktig. Ur informationsteoretisk synpunkt vill man nämligen gärna fråga sig, vilken annan optisk information man har måst avstå ifrån, när man genom detta förfaringssätt har fått ut noggrann fasinformation i fråga om en detalj. Störningen i hela fasfältet är ett

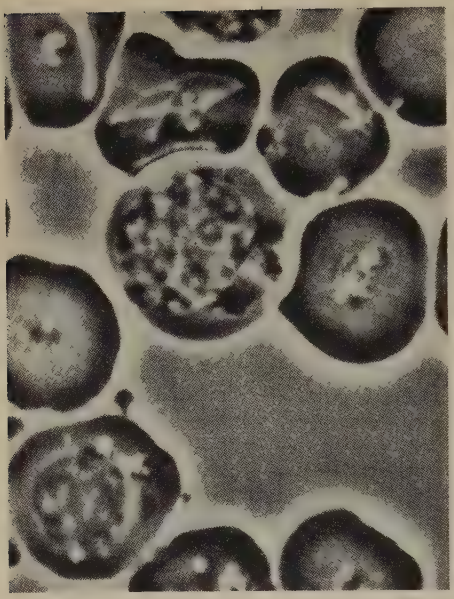


Fig. 7. Bild tagen i faskontrastmikroskop av blodkroppar, varav några sjukliga. »Halon» framträder omkring de relativt stora kropparna som sådana, kraftigare ju större kontrasten är, men den synes ej för de små prickarna och stör ej den inre strukturen hos de angripna kropparna. Denna kunde man effektivt studera först genom Zernikes metod.

mått på denna. Vidare förklarar den varför faskontrastmikroskopen fungera mindre effektivt, desto större del av bildfältet som upptages av de fasavvikande detaljerna. I fig. 7 återges en av de hundratals i medicinska arbeten reproducerade faskontrastbilderna. Störningen synes som ett slags »halo», och denna är obetydlig för små detaljer men starkt störande för mera utbredda fasområden. Ibland framträda faktiskt endast kanterna av objektet och se ut som diskontinuiteter, vilka den oinvigde lätt nog tolkar som hinnor.

Om man vid en linjeformad d-platta skulle ha ett objekt med fasavvikande fläckar, i stället för sådana strimmor som vi här betraktat, så skulle störningarna vara koncentrerade vinkelrätt mot d-plattans zongränser. Det var bland annat för att utjämna dessa, som Zernike valde ringformen för d-plattan, fig. 3 b.

Det sinusformade fasgittret, metodens ideala objekt

I fig. 8 åskådliggöres en annan typ av fasobjekt, nämligen det fall då hela fältet uppvisar en cosinus- eller sinusformad variation av fasen inom relativt små φ-gränser. Diffraktionsfiguren från ett sådant objekt är mycket enkel. Hela öppningen ger givetvis samma figur som förut. Den vågformiga fasstrukturen ger en d-figur, som är helt iden-

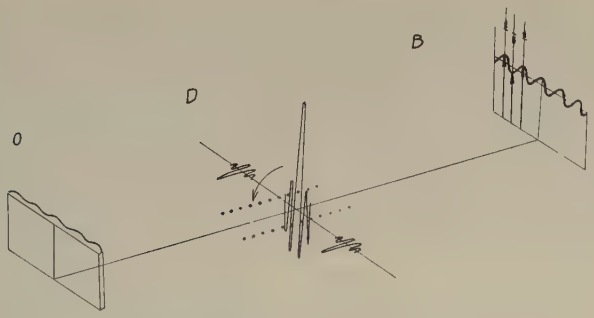


Fig. 8. Diffraktionsförhållandena vid sinusformat fasgitter.

tisk med denna men består av två relativt denna 90° fasvridna komponenter liggande på ett avstånd, bestämt av periodicitetens bredd och våglängden (den Fraunhoferska gitterdiffraktionen; periodbredden är gitterkonstant). Är den periodiska fasstrukturen mera sammansatt, eller är ej φ liten, så uppträda flera utanför liggande komponenter.

Om vi här lägga in en d-platta, så får man, om antalet fasperioder utefter hela bredden ej är för litet, ingen avskärning av fasstrukturens diffrangerade ljus genom den införda d-plattan. Interferensen i bildplanet av de båda komponenterna motsvarar helt det Youngska försöket med dubbelspalt, men även här får man komma ihåg, att det är amplituderna från de kohärenta komponenterna som skola adderas till bakgrundens amplituder. På de ställen, där de interfererande ljusvektorerna från komponenterna stå i konjunktion med dessa, få vi ljusmaxima, och mitt emellan dessa, där de stå i gemensam opposition, få vi minima i amplitud lika långt under medelamplituden. Som figuren visar, få vi fasstrukturen troget avbildad som amplitud- eller intensitetsstruktur.

Den egentliga fysikaliska grunden till att detta fall är idealt ur fasinformationssynpunkt är att ljusvågorna själva ha sinusformat tidsförlopp och att därför deras vågfronter passa som »mall» för att överföra en sinusformad fasstruktur i plana vågor som interferera.

Kuriöst nog finns detta ideala fasgitter i ett viktigt optiskt instrument, nämligen ett ritsat spektroskopiskt gitter, men här i form av ett fel. Detta fel, väl känt för alla spektroskopister och särskilt av de mest kvalificerade konstruktörerna av gitterritsningsmaskiner, består i att fårornas lägen avvika periodiskt från sina rätta platser på lika avstånd från varandra, detta på grund av att längdförflyttningen hos den drivande skruven i ritsningsmaskinen innehåller någon liten periodicitet lika med gänghöjden (eller en del av den). Det är fråga

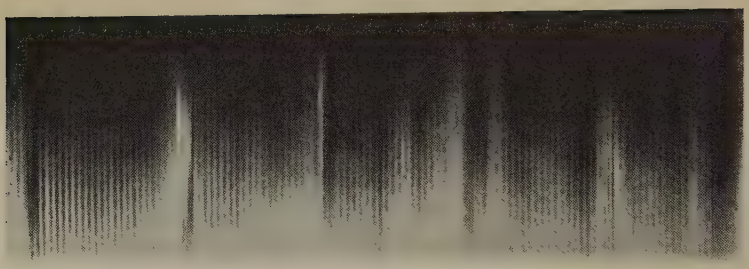


Fig. 9. Fasstrukturen hos ett Rowlandgitter ritsat år 1889 och tillhörigt Stockholms högskolas fysiska institut. Upptagningen är gjord i faskontrast med Na-linjen 5890 Å genom gråkil, vilket tillåter att kvantitativt följa »fasvågigheten» och de fasdiskontinuiteter som finnas. Även de största av dessa motsvara fellägen av gitterritsorna av endast 800 Å=0,00008 mm eller ungefär 1/15 av själva ritsavstånden.

om extremt små sträckor, några hundratals Å, och effekten är därför praktiskt taget oundviklig även vid de mest raffinerade konstruktioner, som även skola tillgodose andra krav på gittren. Vågfronten från ett gitters ljus för en viss våglängd i en viss diffraktionsordning av en spektrallinje är därför alltid något sinusformad, och sidoloberna enl. fig. 8 utgöra, när man direkt betraktar spektrallinjen. vilken är huvudfiguren, de bekanta Rowlandspöken, vilka avslöja periodiciteten.

Det väckte en viss uppmärksamhet, när Zernike vid sin Nobelföreläsning berättade om, att hans idé till faskontrastprincipen hade väckts när han läst ett arbete om dessa gitterfel och några år senare hade prövat sin idé på ett fint gitter, vilket som vanligt var behäftat med denna felaktighet. Ur denna synpunkt kan det vara motiverat att här ta med upptagning av ett av Rowlands gitter i faskontrast. fig. 9.[1] Det är fullt förklarligt, att den lyckosamma idén till sådant fasingrepp som Zernike gjorde uppkom på just detta fall, när dess experimentella sida uppmärksammades av en forskare, som hade en

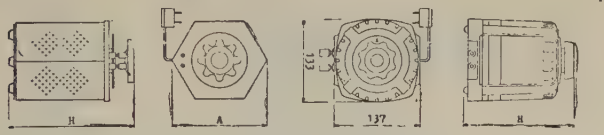
[1] I Zernikes allra första arbete från år 1934 om faskontrast, vilket handlar om provningen av optiska speglar, finns inledningsvis några raders antydan om spektrum från ett diffraktionsgitter, men det nämnes inte om det »överstruktur»-gitter som de periodiska felen ge upphov till. Dock finns tre rader om saken i Zeiss' patentskrift, till vilken Zernike trots att hans namn ej finns med lämnat underlaget. Françon och förf. hade år 1949 glädjen att uppmärksamma denna goda tillämpning av faskontrast, vilken därefter kom att utvecklas. Referenserna i och till dessa arbeten skulle ha blivit något annorlunda, om vi med skarpare detektivblick hade penetrerat inledningen, eller om Zernikes koncentrerade framställning hade breddats med den nu lämnade trevliga notisen.

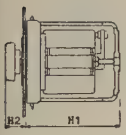
PHILIPS vridtransformatorer

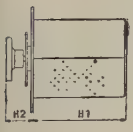
ge kontinuerlig och praktiskt taget förlustfri spänningsreglering

Bordstransformatorerna i storlekar t.o.m. 1040 VA ha smältsäkringar i kontaktarmsledningen; de övriga storlekarna sakna inbyggd säkring. Utspänningen är variabel antingen mellan 0 V och nätspänningen, eller mellan 0 V och 20 % över nätspänningen.

Transformatorer av bordstyp







Nätspänning V	Effekt VA	Dimensioner i mm					Sekundärstr. A
		A	H	A1	H1	H2	
110	360	–	165	–	130	30	2,8
110	730	–	185	–	150	30	5,5
130	175	–	165	–	130	30	1,2
130	350	–	165	–	130	30	2,3
130	690	–	185	–	150	30	4,6
130	1380	190	260	187	190	50	9,2
220	130	–	165	–	130	30	0,5
220	260	–	165	–	130	30	1,0
220	520	–	185	–	150	30	2,0
220	1040	190	260	187	190	50	4,0
220	2080	215	272	215	200	50	8,0

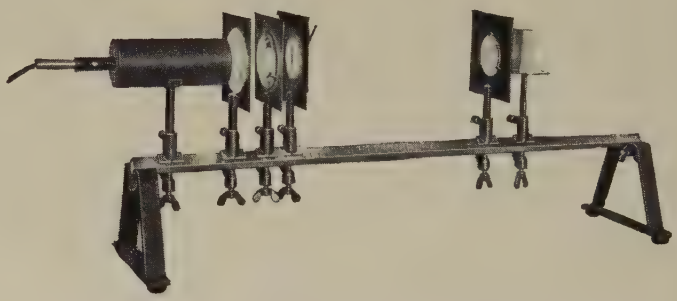
Inbyggnadstransformatorer

110 V nätspänning motsvarar 0–130 V sekundärspänning
130 V nätspänning motsvarar 0–150 V sekundärspänning
220 V nätspänning motsvarar 0–260 V sekundärspänning

SVENSKA AB PHILIPS MÄTINSTRUMENTAVDELNINGEN · STOCKHOLM 6

Med Norstedts experimentsats för optik

kan alla demonstrationsförsök utföras, som ingår i folkskolans och realskolans kurs. En utförlig handledning med avbildningar gör att försöken är mycket lätta att utföra och ej kräver någon tidsödande förberedelse.



Demonstration av spektrum med delar ur experimentsatsen.

Pris för experimentsatsen inkl. specialinredd förvaringslåda av trä kronor 285:—

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen - Box 898 - Stockholm

tillräckligt klar matematisk överblick över diffraktionsläran för att göra kombinationen mellan teori och experiment. Rowlandspökena, vars tydning och undertryckande fordrat så mycken attack av framstående forskare, ha alltså fått en senkommen positiv merit: att ha gett upphov till en ny optisk metod.

Utvecklingslinjer från Zernikes princip

Faskontrastmetoden har i sin fortsatta utveckling grenat upp sig. Mikroskopin är givetvis det största och praktiskt viktigaste området. I regel arbetar man med vitt ljus, och diffraktionsvillkoren äro ej kritiska. Stort intresse har de senare åren faskontrast i färg, särskild färgad »halo», tilldragit sig, en utveckling som även Zernike i samarbete med andra inledde.

En andra utvecklingslinje går från Zernikes första idéer och omfattar mätning av poleringsjämnhet hos glasytor, inhomogeniteter inom optiska system, såsom spektroskopiska instrument, bestämning av brytningsindex hos gaser och vätskor med stor noggrannhet m. m. Här är det fråga om mätande optiska metoder och icke kontrastförbättrare för synen. I dessa tillämpningar har ofta den vanliga, här för den enkla framställningens skull valda och inom mikroskoptillämpningen närmast till hands liggande begränsningen till små φ och 90° fasvridning fått falla. Sålunda kunna i vissa fall hur många ljusvåglängder som helst få ingå i den optiska väglängdsskillnaden, endast med motsvarande hänsyn till precisionen som ligger i varje interferometrisk mätning, nämligen skärpan i den spektrallinje som användes. Den enkla vektorframställningen modifieras, väsentligen beträffande vektorernas lägen, men de fysikaliska grunderna äro oförändrade. Kvar står den noggranna information om fas, ned till tusendelar av ljusvåglängden, som kan erhållas, och som i mikroskopin motsvarar stor faskänslighet, dvs. god kontrast för ögat.

Zernikes idé har även starkt befruktat intresset för andra metoder att vinna noggrann information om svängningsfaser. Självfallet är det fråga om andra interferometriska metoder, och några av dem, såsom s. k. multipelinterferenser, utgöra nyttiga komplement till faskontrastmetoden, eftersom de äro gynnsamma för de utbredda fasobjekten men mindre gynnsamma eller oanvändbara för de små objekt, där som vi sett faskontrastmetoden fungerar nära nog idealt.

Frits Zernike är född år 1888 och blev 1915 doktor vid Amsterdams universitet. Alltsedan detta år har han varit knuten till Groningens universitet, där han sedan år 1920 är professor i teoretisk fysik. Hans arbeten omfatta statistisk mekanik och optik. Han erhöll för ett år sedan Rumfordmedaljen.

Enzymkemi II

Av docent Klas-Bertil Augustinsson, Stockholm

C. Bestämning av enzymaktiviteter[1]

Endast i ett fåtal fall är det möjligt att bestämma enzymer direkt med kemiska eller fysikaliska metoder (t. ex. då ett enzym ger ett karakteristiskt absorptionsspektrum). Oftast är enzymets kemiska natur okänd, och därför bestämmer man i de flesta fall ett enzyms koncentration genom att mäta dess aktivitet. Man mäter enzymreaktionens hastighet genom att bestämma minskningen av substratkoncentrationen eller bildningen av några av slutprodukterna. Hastigheten uttryckes i godtyckliga enheter och bestämmes under sådana experimentella förhållanden att alla de faktorer, som kunna inverka på enzymaktiviteten (substratkoncentration, temperatur, pH etc.), hållas konstanta. Viktigt är också, att den uppmätta aktiviteten verkligen är proportionell mot mängden enzympreparat, som användes i försöken.

Reaktionshastigheten (och alltså enzymaktiviteten) kan uttryckas i den mängd substrat, som omsatts på en viss tid. Detta är ett riktigt förfaringssätt endast under förutsättning att omsatt mängd substrat är proportionell mot tiden. Endast för ett fåtal enzymer gäller denna proportionalitet även då substratet är nästan helt förbrukat (nollte ordningens reaktion). Då procent omsatt substrat avsättes mot tiden, erhåller man emellertid vanligen en böjd kurva, som asymptotiskt närmar sig gränsvärdet 100 % omsättning. I en del fall överensstämmer denna kurva med den, som gäller för en första ordningens reaktion; i dessa fall kan motsvarande reaktionskonstant användas som ett mått på reaktionshastigheten (eller enzymmängden), dvs.

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{[S]}{[S]-x}$$

där x är mängden omsatt substrat (S) under tiden t.

I allmänhet är den ursprungliga substratkoncentrationen mycket högre än enzymkoncentrationen och kan anses vara så även under en avsevärd del av den tid, under vilken reaktionen studeras. Nu gäller (se nedan under D), att reaktionshastigheten är proportionell mot koncentrationen av enzym-substrat-komplexet, och man kan antaga, att under en stor del av reaktionen enzymet återfinnes som detta komplex. Med andra ord, man finner reaktionen vara av nollte ordningen. Om en rät linje icke erhålles, kan man dock oftast välja försöksbetingelserna så, att man med god approximation kan draga

[1] Forts. från septemberh. 1953, s. 169.

en asymptot genom tiden = 0 och därmed grafiskt extrapolera för reaktionens utgångshastighet. Det är denna hastighet man under alla förhållanden måste ange.

Vid bestämning av enzymaktiviteter komma både kemiska och fysikaliska metoder till användning. Tabell 13 ger några exempel på sådana metoder.

Tabell 13. Vanligen använda metoder för bestämning av enzymaktiviteter

Metod	Enzymsystem
kemiska metoder:	
titrimetri	mjölksyrabildningen vid glykolys, esteraser, ureas, trypsin, formoltitrering, katalas
gravimetri	fosfataser, nukleaser
gasometri	esteraser, jäsning, karbohydraser, ureas, katalas, cytokromoxidas, coenzym I
sockerbestämning	karbohydraser
aminosyrabestämning	äggvitespjälkande enzymer
fysikaliska metoder:	
kolorimetri	peroxidas, coenzym I, katepsin
spektrofotometri	cytokrom, dehydrogenaser
nefelometri	amylas, pepsin, proteinaser
viskosimetri	amylas, pepsin
polarimetri	karbohydraser
konduktometri	trypsin
elektrometri	esteraser

D. Enzymreaktionernas kinetik

Enzymreaktionernas *kinetik* bestämmer man vanligen genom att mäta den hastighet, med vilken substratet försvinner (eller reaktionsprodukterna bildas) med tiden som oberoende variabel. Då enzym*aktiviteten* skall bestämmas, väljer man med fördel tiden som beroende variabel och uttrycker aktiviteten i den tid, som behövs för att omsätta en bestämd mängd av den ursprungliga substratkoncentrationen (se ovan under C).

Enligt en allmänt antagen, av Michaelis och Menten (1913) uppställd teori om enzymernas verkningsmekanism, förenar sig enzymet med

substratet under bildning av ett instabilt enzym-substrat-komplex, som sedan sönderdelas i enzym och reaktionsprodukter. Existensen av detta komplex har på senare tid experimentellt visats. Denna teori är grundad bl. a. på följande två karakteristiska egenskaper för enzymreaktioner: a) Vid konstant ursprunglig substratkoncentration är reaktionshastigheten proportionell mot enzymkoncentrationen inom relativt vida gränser; b) Vid konstant enzymkoncentration ökar reaktionshastigheten med en ökning av substratkoncentrationen enligt ekvationen för en rektangulär hyperbel och når asymptotiskt ett maximivärde (se fig. 1 a).

I det följande redogöras för några enkla enzymreaktioner, nämligen då systemet består av enzym och substrat samt av enzym, substrat och inhibitor (enzymgift). Följande beteckningar komma härvid till användning:

$[E_t]$, $[S_t]$, $[I_t]$	totala molara konc. av enzym, substrat, inhibitor resp.
[E], [S], [I]	fria » » » » » » »
[ES]	molara konc. av enzym-substrat-komplexet
[EI]	» » » enzym-inhibitor-komplexet
K_S	»dissociationskonstant» för ES (Michaelis' konstant)
$K_{S'}$	skenbar »dissociationskonstant» för ES då en inhibitor är närvarande i konstant koncentration
K_I	dissociationskonstant för EI
v, v'	uppmätt reaktionshastighet utan och med inhibitor resp.
V_{max}	maximal reaktionshastighet, då $[S] \to \infty$
V'_{max}	maximal reaktionshastighet i närvaro av en icke-kompetitiv inhibitor, då $[S] \to \infty$
k_1, k_2 etc.	hastighetskonstanter

1. Enzym+substrat

Enzym och substrat reagera under bildning av ett aktivt enzym-substrat-komplex ES, som sönderfaller i enzym och slutprodukter P:

$$E+S \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} ES \xrightarrow{k_3} E+P$$

Hastigheten med vilken ES bildas är:

$$\frac{d[ES]}{dt} = k_1([E_t]-[ES])[S]-(k_2+k_3)[ES] \qquad (1)$$

Hastigheten med vilken substratet försvinner är:

$$\frac{d[S]}{dt} = -k_1([E_t]-[ES])[S]+k_2[ES] \qquad (2)$$

Reaktionens slutliga hastighet är då summan av (1) och (2):

$$\frac{d([ES]+[S])}{dt} = -k_3[ES] \tag{3}$$

Vanligen gäller, särskilt för hydrolytiska enzymreaktioner och speciellt då reaktionshastigheten är en lineär funktion av tiden, att [ES] är konstant och alltså $d[ES]/dt=0$; ekv. (3) reduceras då till:

$$v = -\frac{d[S]}{dt} = k_3[ES] \tag{4}$$

[ES] kan man ej mäta direkt, men om ett stort överskott av substratet tillsättes, så överföres allt enzym till komplexet ES. En ytterligare ökning av [S] kan nu icke öka [ES] och därmed sker ingen ytterligare ökning av v, som nått ett maximivärde, dvs. då $[E_t] \approx [ES]$:

$$V_{max} = k_3[E_t] \tag{5}$$

Eftersom $d[ES]/dt=0$, följer av ekv. (1):

$$\frac{k_2+k_3}{k_1} = \frac{([E_t]-[ES])\,[S]}{[ES]} = \frac{[E]\,[S]}{[ES]} = K_S \tag{6}$$

Ursprungligen definierades K_S som jämviktskonstanten för den reversibla bildningen av ES ur E och S. Denna definition innebär, att K_S är ett mått på substratets affinitet till enzymet (anges vanligen som $1/K_S$, som är av storleksordningen 10—10^6). Ekv. (6) liknar också formellt ett jämviktsuttryck, men den representerar i själva verket »jämvikten» för två på varandra följande reaktioner, varav den första är reversibel. En mätning av reaktionshastigheten baserad endast på substratets försvinnande ger icke k_2/k_1, därför att k_3 måste ha ett ändligt värde. Endast då $k_3 \ll k_2$ blir $K_S = k_2/k_1$, men omvänt då $k_3 \gg k_2$ är $K_S = k_3/k_1$. I de flesta fall kommer K_S dock att vara en sammansatt funktion av alla tre reaktionskonstanterna.

Enl. ekv. (4), (5) och (6) följer att *relativa aktiviteten* är:

$$\frac{v}{V_{max}} = \frac{[ES]}{[E_t]} = \frac{[ES]}{[E]+[ES]} = \frac{1}{\frac{K_S}{[S]}+1} \tag{7 a}$$

under förutsättning att den fria molara substratkoncentrationen [S] är mycket större än $[E_t]$ och lika med totala (ursprungliga) substratkoncentrationen $[S_t]$. Av ekv. (7 a) följer att då $v=\frac{1}{2}V_{max}$, är $[S]=K_S$, dvs. K_S är numeriskt lika med [S], då hastigheten är halva maximala hastigheten.

Om man i ett diagram avsätter v mot $pS(=-\log[S])$ erhållas liknande kurvor som för ett syra-bas-system, då mängd syra avsättes mot pH (se fig. 1 b).

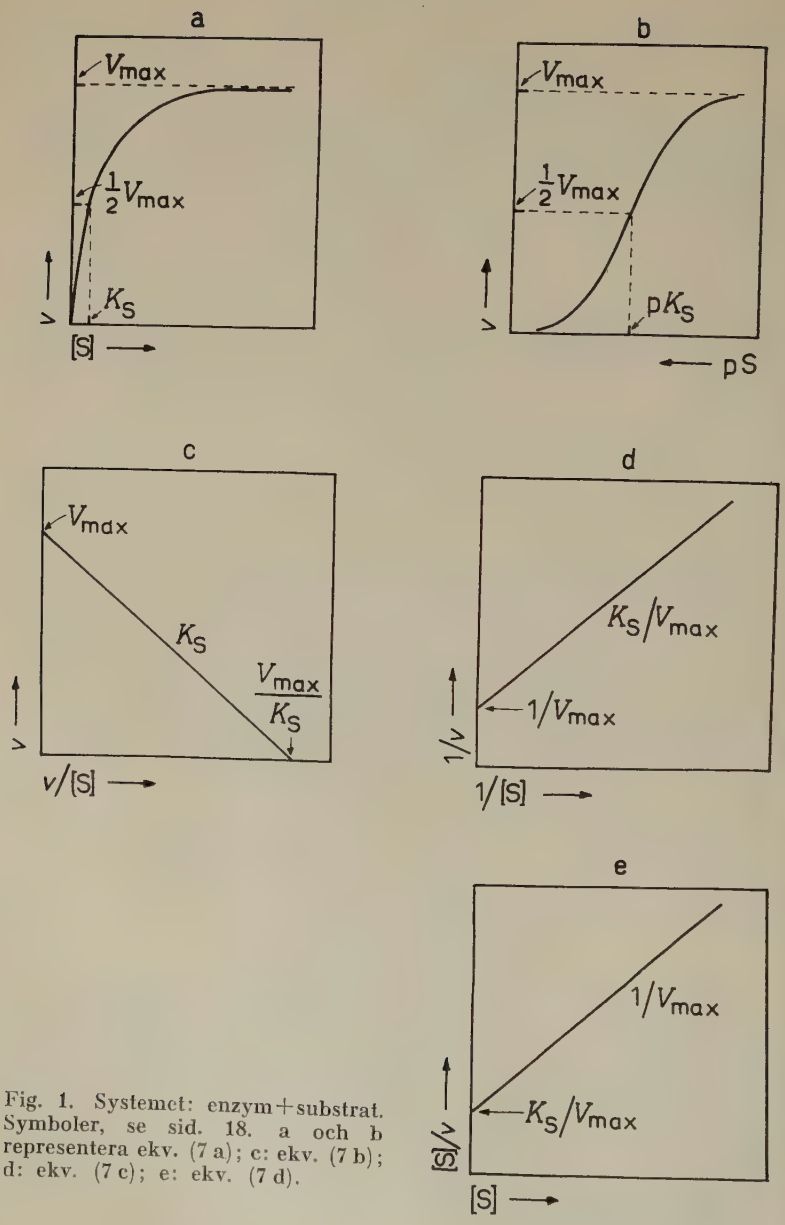


Fig. 1. Systemet: enzym+substrat. Symboler, se sid. 18. a och b representera ekv. (7 a); c: ekv. (7 b); d: ekv. (7 c); e: ekv. (7 d).

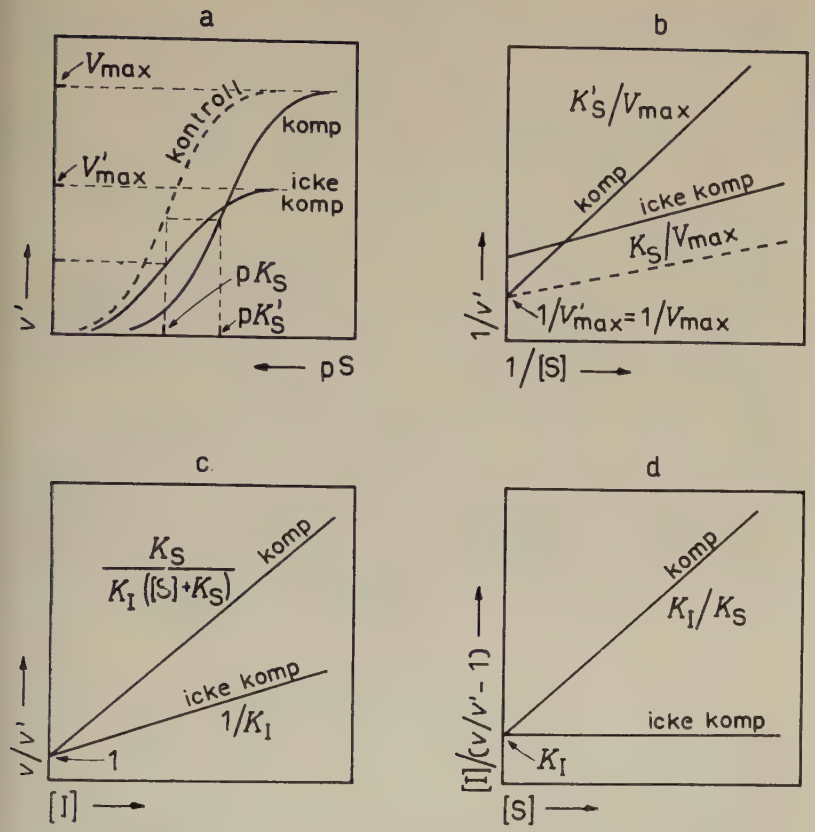


Fig. 2. Systemet: enzym+substrat+inhibitor. Symboler, se sid. 18. a representerar ekv. (9, 10); b: ekv. (11); c: ekv. (13); d: ekv. (14).

Konstanterna V_{max} och K_S bestämmas lämpligast grafiskt genom att avsätta v mot $v/[S]$ (fig. 1 c):

$$v+K_S\frac{v}{[S]}=V_{max} \qquad (7\,b)$$

eller $1/v$ mot $1/[S]$ (fig. 1 d):

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{V_{max}}+\frac{K_S}{V_{max}}\cdot\frac{1}{[S]} \qquad (7\,c)$$

eller $[S]/v$ mot $[S]$ (fig. 1 e):

$$\frac{[S]}{v}=\frac{[S]}{V_{max}}+\frac{K_S}{V_{max}} \qquad (7\,d)$$

I alla tre fallen erhållas räta linjer, ur vilka V_{max} och K_S kunna beräknas.

2. Enzym+substrat+inhibitor

Varje ämne, som reagerar med ett enzym på så sätt att enzymets aktivitet nedsättes, är en inhibitor (se ovan under A, sid. 5). Reagerar inhibitorn med enzymets aktiva grupper, dvs. de grupper som bindas vid substratet, talar man om en »kompetitiv inhibitor», vilket anger att substrat och inhibitor tävla om att bindas till enzymet. Angriper inhibitorn en annan, för enzymets verkan nödvändig men för substratbindningen icke nödvändig grupp, talar man om en »icke kompetitiv inhibitor». I båda fallen kan hämningen vara reversibel eller irreversibel; i senare fallet är det i själva verket fråga om en »inaktivator». En kompetitiv reversibel inhibitor kan, om den får inverka tillräckligt länge på enzymet, verka inaktiverande, dvs. hämma irreversibelt.

Kompetitiv hämning. Antag att ett ämne X reagerar med enzymet E under bildning av komplexet EX (beteckningar i övrigt som ovan):

$$E+X\underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}}EX\xrightarrow{k_3}E+P$$

I denna reaktion kallar man X ett *substrat*, om komplexet EX sönderfaller till E och produkter (P) med en hastighet, som är iakttagbar under de betingelser, som reaktionen studeras. Om däremot sönderfallet av EX är så obetydligt, att det kan försummas ($k_3 \ll k_2$), då är X en reversibel kompetitiv *inhibitor*. En reaktion mellan enzym och inhibitor (I) motsvarar då följande jämvikt:

$$E+I\rightleftarrows EI$$

där EI är inaktiv med dissociationskonstanten K_I. Vid samtidig närvaro av substratet S kommer hämningen att bero både av inhibitor- och substratkoncentrationerna:

$$K_S=\frac{[E][S]}{[ES]} \text{ och } K_I=\frac{[E][I]}{[EI]} \qquad (8)$$

Liksom för $[S]$ antages, att $[I]$ är mycket större än $[E_t]$ ($=[E]+[ES]+[EI]$) och lika med totala (ursprungliga) inhibitorkoncentrationen. Vid närvaro av I är reaktionshastigheten v' och den maximala hastig-

heten $V'_{max}=V_{max}$ (för en kompetitiv hämning); se fig. 2 a. Följande samband gäller, härlett på samma sätt som ekv. (7 a):

$$\frac{v'}{V'_{max}}=\frac{[ES]}{[E]+[ES]+[EI]}=\frac{1}{\frac{K_S}{[S]}+1+\frac{K_S[I]}{K_I[S]}} \qquad (9)$$

Nu är $V'_{max}=V_{max}=v(1+K_S/[S])$ (se ekv. 7 b) och alltså:

$$v'=\frac{v}{1+\frac{K_S[I]}{K_I([S]+K_S)}} \qquad (10)$$

Ekv. (9) kan skrivas sålunda:

$$\frac{1}{v'}=\frac{1}{V'_{max}}+\frac{1}{[S]}\cdot\frac{K_S}{V'_{max}}\left(1+\frac{[I]}{K_I}\right) \qquad (11)$$

som ger en rät linje, då $1/v'$ avsättes mot $1/[S]$ vid konstant enzym- och inhibitorkoncentration (fig. 2 b). Vid kompetitiv hämning blir interceptet på ordinatan ($=1/V'_{max}$) samma som vid frånvaro av inhibitorn. Faktorn $(1+[I]/K_I)$ anger ökningen av linjens lutning (i förhållande till »kontrollen», jfr fig. 1 d och ekv. 7 c), där V'_{max} är konstant. Därav följer, att den skenbara konstanten K'_S (för ES i närvaro av I) ökar med samma faktor:

$$K_S\left(1+\frac{[I]}{K_I}\right)=K'_S \text{ eller } K_I=\frac{[I]}{K'_S/K_S-1} \qquad (12)$$

Detta betyder, att $K'_S>K_S$, att hämningen är större vid låga än vid höga [S], och att en högre [S] är nödvändig för att mätta enzymet (se fig. 2 a).

En annan grafisk metod grundar sig på följande uttryck, som är ekv. (10) skriven i annan form:

$$\frac{v}{v'}=1+[I]\frac{K_S}{K_I([S]+K_S)} \qquad (13)$$

Avsättes v/v' mot [I] erhållas vid kompetitiv hämning räta linjer, vars intercept på ordinatan är 1 och vars lutning varierar med [S] (se fig. 2 c).

Konstanten K_I bestämmes ur ekv. (12) eller lämpligast genom att av uttrycket för v/v' (ekv. 13) bilda funktionen:

$$\frac{[I]}{v/v'-1}=\frac{K_I}{K_S}[S]+K_I \qquad (14)$$

Avsättes $[I]/(v/v'-1)$ mot [S], ligga mätpunkterna på en rät linje, vars intercept på ordinatan är K_I och vars lutning är K_I/K_S (fig. 2 d). Termen $[I]/(v/v'-1)$ är numeriskt lika med den koncentration av I ($=I_{50}$), som reducerar enzymaktiviteten till hälften.

Icke kompetitiv hämning. En icke kompetitiv hämning av ett enzym kan representeras av reaktionen:

$$ES + I \rightleftarrows ESI$$

där ESI är inaktiv med dissociationskonstanten K_I. Denna reaktion utsäger, att inhibitorn förenar sig med enzymet oberoende av substratets närvaro och därför angriper E och ES med samma affinitet vid en grupp i enzymet, som icke förenar sig med substratet.

Följande hastighetsekvationer kunna härledas:

$$\frac{1}{v'} = \left(\frac{1}{V'_{max}} + \frac{K_S}{V'_{max}} \cdot \frac{1}{[S]}\right)\left(1 + \frac{[I]}{K_I}\right) \tag{15}$$

och, eftersom $V'_{max} = V_{max}(1 + [I]/K_I)$:

$$\frac{v}{v'} = 1 + \frac{[I]}{K_I} \text{ eller } \frac{[I]}{v/v' - 1} = K_I \tag{16}$$

Om $1/v'$ avsättes mot $1/[S]$ erhållas räta linjer, vars lutning såväl som intercept ökar med samma faktor $(1 + [I]/K_I)$, vilket betyder att K_S förblir konstant (fig. 2 b). Vid den andra grafiska metoden, då v/v' avsättes mot [I], sammanfalla de räta linjerna för olika [S] eftersom ekv. (16) ej innehåller [S] som faktor (fig. 2 c).

Slutligen erhålles, om $[I]/(v/v' - 1)$ avsättes mot [S] en linje, som är parallell med [S]-axeln (hämningen oberoende av [S]) (fig. 2 d).

Litteratur

Följande elementära böcker rekommenderas i angiven ordning:

Myrbäck, K., *Enzymatische Katalyse.* Walter de Gruyter & Co., Berlin 1953. 181 s.

Sumner, J. B. och Somers, G. F., *Chemistry and methods of enzymes.* 3rd ed., Academic Press Inc., New York 1953. 462 s.

Bersin, T., *Kurzes Lehrbuch der Enzymologie.* 3. Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951. 274 s.

En kortfattad översikt av enzymkemiens historiska utveckling återfinnes i:

Fleury, P. F. och Courtois, J. E., *The development of enzymology.* Endeavour *9* (1950) 144—148.

Enzymernas biologiska betydelse skildras på ett fängslande sätt av:

Sumner, J. B., *Enzymes, the basis of life.* J. Chem. Education *29* (1952) 114—118.

De förnämsta standardverken på området äro:

Sumner, J. B. och Myrbäck, K., *The enzymes.* Academic Press Inc., New York 1950—1952. Vol. I—II.

Bamann, E. och Myrbäck, K., *Die Methoden der Fermentforschung.* Georg Thieme, Leipzig 1940—1941. Vol. 1—4, 3385 s.

Enzymkemiens nuvarande utveckling inhämtar man bäst genom att anlita: *Advances in enzymology and related subjects.* Vol. *13* (1952); amerikansk. *Ergebnisse der Enzymforschung.* Vol. *12* (1951); tysk.

Hårdmetall, en viktig pulvermetallurgisk produkt

Av docent Roland Kiessling, Söderfors Bruk, Söderfors

Beteckningen »hårdmetall» använder man för de produkter, som erhållas genom sammansintring på pulvermetallurgisk väg av hårda karbider, framför allt volframkarbid, med någon mjukare metall, vanligen kobolt som bindemetall. Hårdmetall har på senare tid fått allt vidsträcktare användningsområden, t. ex. som bergborrskär, svarvstålseggar, dragstenar för rör och tråd m. m., och i Sverige finnes en stor och expanderande hårdmetallindustri, som även i stor utsträckning arbetar på export.

Hårdmetallen utvecklades i Tyskland vid Osramverken. Vid dragning av glödlampstråd användes ursprungligen diamanter, men då dessa efter första världskriget voro mycket svåra att erhålla, fick en forskargrupp vid Osrams forskningslaboratorier i uppdrag att försöka framställa en ersättningsprodukt. Man experimenterade under flera år med volframkarbid på grund av dess stora hårdhet och sökte till att börja med framställa volframkarbidkroppar genom gjutning och senare genom sintring av pressat volframkarbidpulver, det senare en teknik, som just användes för volframtrådtillverkning. De erhållna produkterna kunde dock på grund av sin stora sprödhet och porositet ej användas, och det var först sedan man tillsatt mindre mängder av en mera lättsmält metall ur järngruppen, som man erhöll täta och användbara produkter. Det första patentet för sintrad volframkarbid med kobolt som bindemedel uttogs 1923 av Osramverken med Karl Schröter som uppfinnare.[1]

De så sintrade karbidkropparna erhöll dock ringa användning inom glödlampsindustrin, och förfaringssättet såldes till Kruppverken, som lancerade produkten i slutet av 20-talet för svarvändamål i hårt material under namnet »Widia» (av: wie Diamant). Sedan pionjärpatentet i slutet av 30-talet utgått, upptogs tillverkningen på flera ställen, och under och efter andra världskriget har hårdmetallen befunnit sig på stadig frammarsch i olika delar av världen.

I Sverige upptogs tillverkningen av hårdmetall redan 1931 av Fagerstaverken, som under 40-talet följdes av ett flertal företag, ofta i anslutning till järn- och stålframställningen. Sverige har en avsevärd hårdmetallproduktion, den är f. n. större än Tysklands, och intar vad det gäller bergborrtillverkning en ledande ställning i världen.[2]

Den vanligaste typen av hårdmetall innehåller endast volframkarbid

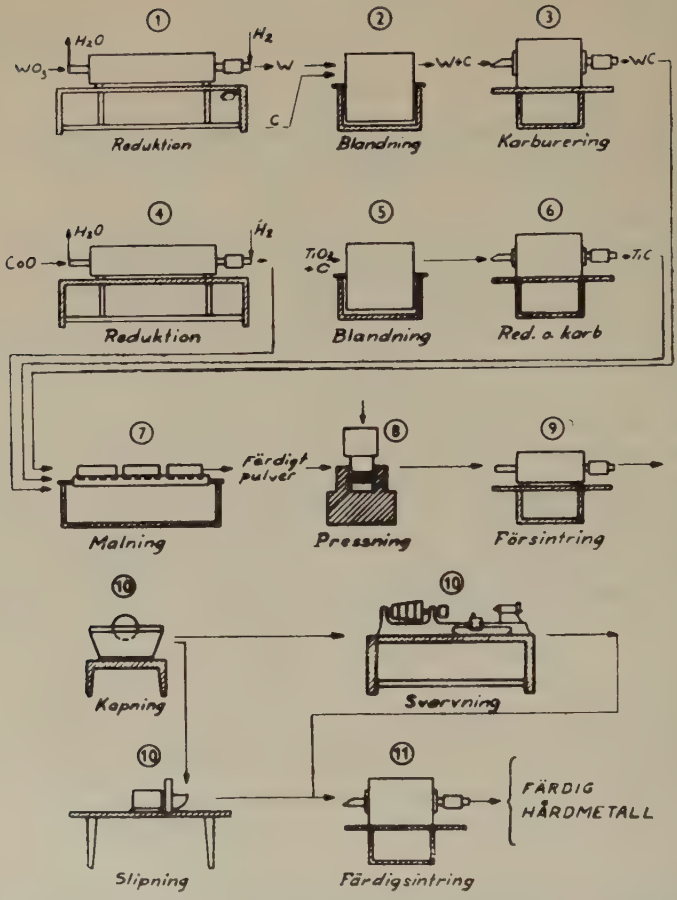


Fig. 1. Schematisk översikt över hårdmetallframställningen i Söderfors.

och kobolt, och man har alltid två saker att ta hänsyn till vid dess framställning och användning. Dels önskar man så stor hårdhet och slitstyrka som möjligt, och detta åstadkommes av volframkarbid eller eventuellt andra karbider, samtidigt önskar man emellertid en så stor seghet som möjligt, detta för att öka hårdmetallens hållfasthet. Seghet åstadkommes av kobolten, och därför är det väsentligt att maximalt kunna utnyttja dess elastiska egenskaper. Hårdmetallens fysikaliska egenskaper framgå av tabell 1, där den jämförts med snabbstål och några metaller.

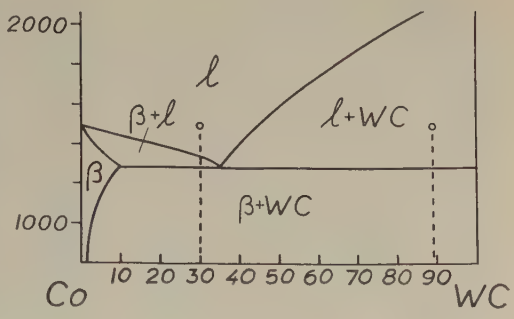


Fig. 2. Temperatur-sammansättningsdiagram för de pseudobinära systemet kobolt-volframkarbid (något förenklat). De vertikala streckade linjerna ange sammansättningarna av legeringarna i fig. 3 och 4. Diagrammets utseende vid WC-sidan ej fullt klarlagt vid hög temperatur. WC sönderfaller under bildning av W_2C och C vid ca 2600°.

Tabell 1

Material	Vickershårdhet kp/mm²	Böjhållfasthet kp/mm²	Elasticitetsmodul kp/mm²
Koppar	< 50		12 000
Rent järn	< 100		20 000
Stål (snabbstål)	800—900	400—300	20 000
Hårdmetall (G)	1050—1600	250—150	50 000—60 000
Hårdmetall (S)	1600—1850	150—100	50 000—60 000

Utrymmet medger ej någon utförligare beskrivning över hårdmetalltillverkningen, schematiskt framgår den av fig. 1. Slutsintringen, den process som ger hårdmetallen dess hårdhet och slitstyrka, sker i vätgasatmosfär eller vakuum vid temperaturer i området 1350—1550° C.

Vi skola ett ögonblick studera vad som sker under slutsintringen. Figur 2 visar ett något förenklat diagram av det pseudobinära, metastabila systemet volframkarbid-kobolt. Som synes ligger den eutektiska sammansättningen vid ca 35 vikts-% volframkarbid och den eutektiska temperaturen vid ca 1280°. Man observerar vidare, att koboltfasen vid högre temperaturer kan lösa stora mängder volframkarbid (upp till ca 10 vikts-%), medan den däremot vid rumstemperatur endast förmår lösa mindre än en procent. Det är alltså en avsevärd skillnad i löslighet för volframkarbid i kobolt vid sintringstemperaturen och vid rumstemperatur, och detta är orsaken till att just kobolt användes som bindemetall. De med kobolt närbesläktade metallerna järn och nickel ha visserligen även en stor löslighet för volframkarbid vid sintringstemperaturen, men den lösta volframkarbiden hålles till stor del kvar även vid rumstemperatur (fast löslighet vid rumstemperatur för volframkarbid i respektive järn, kobolt och nickel är i procent ca 5, < 1 och 25). Den relativt stora mängden volframkarbid, som kvarstannar i lösning i järn och nickel vid rumstemperatur, gör att

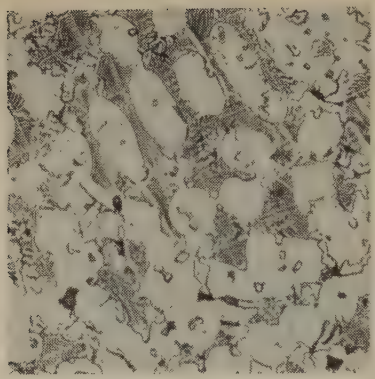


Fig. 3. Legering av 30 vikts-% volframkarbid och 70 vikts-% kobolt. Smält. Vit fas: kobolt, däremellan lamellärt volframkarbid-kobolt-eutektikum. Förstoring 400 ×.

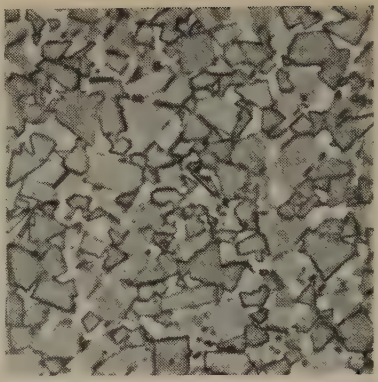


Fig. 4. Legering av 89 vikts-% volframkarbid och 11 vikts-% kobolt. Sintrad vid 1500°. Vit fas: kobolt. Grå korn: volframkarbid. Förstoring 1500 ×.

bindemetallen blir hård och spröd, vilket har ett ogynnsamt inflytande på hårdmetallens egenskaper. Vidare syns det av diagrammet, att koboltens löslighet i volframkarbid å andra sidan är mycket obetydlig.

Legeringar med sammansättning på den koboltrika sidan av eutektiket och på den koboltfattiga skilja sig avsevärt i utseende och egenskaper. Mikrofotot (fig. 3) visar utseendet hos en legering med 70 vikts-% kobolt och 30 vikts-% volframkarbid, som smälts och därefter fått svalna. Denna legering har ett normalt utseende, dvs. vi erhålla primära koboltdendriter i ett finlamellärt volframkarbid-kobolt eutektikum. Studera vi utseendet hos en legering på volframkarbidsidan av eutektiket (fig. 4), erhålla vi ett helt annat utseende på strukturen. Vi erhålla här primära volframkarbidkorn med ett mycket karakteristiskt utseende i koboltfas, men något eutektikum synes ej. Vi ha här att göra med ett s. k. urartat eutektikum, dvs. den vid eutektiska temperaturen utfallande volframkarbiden har utfällts på redan existerande volframkarbidkorn. Detta utseeende hos strukturen återfinnes hos alla legeringar på volframkarbidsidan av eutektiket, och alla komerciella hårdmetallegeringar ha sådan sammansättning (i allmänhet i området 6—20 vikts-% kobolt).

Vi ha här endast betraktat det förenklade pseudobinära systemet volframkarbid-kobolt. Det ternära systemet volfram-kobolt-kol är emellertid betydligt mer komplicerat (fig. 5, observera att sammansättningarna här äro givna i atom-%) och ett flertal faser uppträda där, som man måste ta hänsyn till vid tillverkningen. Sålunda kan

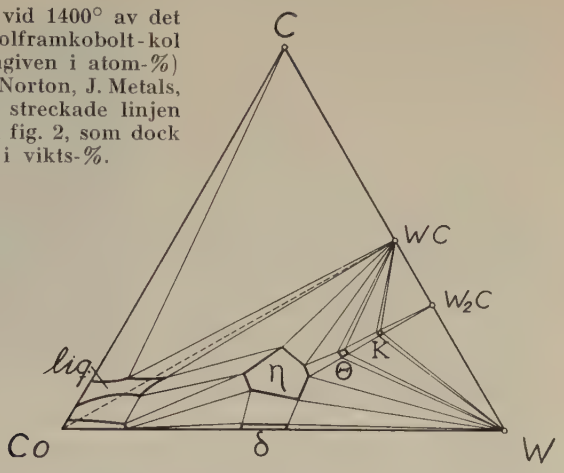


Fig. 5. Isotermt snitt vid 1400° av det ternära systemet volframkobolt-kol (sammansättningen angiven i atom-%) (enl. P. Rautala och J. Norton, J. Metals, okt. 1952, 1045). Den streckade linjen Co-WC anger snittet i fig. 2, som dock där är angivet i vikts-%.

volfram och kol förutom karbid WC även bilda karbiden W_2C, kobolt och volfram kunna bilda två intermediära föreningar (varav dock endast en, δ, är stabil vid 1400°) och dessutom kunna volfram-kobolt-kol bilda tre stycken olika dubbelkarbider. Det är betecknande för vad som finnes att göra på detta område, att två av dessa karbider (Θ och K) tills helt nyligen varit helt okända och att homogenitetsområdena för såväl η som Θ och K fortfarande ej äro ordentligt kända. Den s. k. η-fasen med en ungefärlig sammansättning av Co_3W_3C är isomorf med den s. k. snabbstålskarbiden och har en hårdhet som överstiger volframkarbidens. Den förekommer ofta i hårdmetall i form av körtlar med karakteristiskt utseende. Dessa körtlar äro icke önskvärda, enär hårdmetallen blir spröd. Genom lämpliga metoder har man dock lyckats få fram den i finfördelad form och kan då utnyttja dess hårdhet utan att allt för mycket sänka hårdmetallens böjhållfasthet.

Hårdmetall av den ursprungliga typen, som endast innehåller volframkarbid och kobolt, är lämplig för bearbetning av gjutgods och för bergborrar och dylikt och kallas enligt tysk normbeteckning G-kvalitet (av Gusseisen). Gjutgods ger vid svarvning korta spröda spån, som omedelbart bryta av. Hårdmetall av enbart volframkarbid och kobolt är emellertid ej lämplig att använda vid bearbetning av stål, som ger långa sammanhängande svarvspån. Dessa svarvspån komma nämligen, då de glida över hårdmetallplattan, att svetsa fast vid densamma och därvid rycka ut volframkarbidkorn. Hårdmetallplattan kommer därvid snabbt att bryta ned. Genom att tillsätta titankarbid kan man emellertid erhålla kvaliteter, som motstå denna

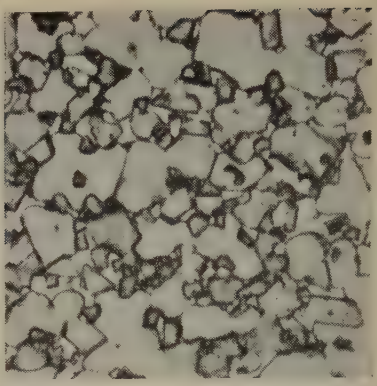


Fig. 6. Legering av 15 vikts-% titankarbid, 79 vikts-% volframkabid och 6 vikts-% kobolt. Vit fas i liten mängd: kobolt, rundade gråvita öar: fast lösning av volframkarbid i titankarbid, grå, skarpkantade korn; volframkarbid. Förstoring 1500 ×.

nedbrytning. Dessa betecknas med bokstaven S (av tyska Stahl) och utmärka sig av en större hårdhet men något lägre böjhållfasthet än G-kvaliteter. Titankarbid löser volframkarbid i stor mängd, upp till 70 vikts-% av titanatomerna i det kubiskt ytcentrerade titankarbidgittret kan ersättas av volframatomer, och den så erhållna fasta lösning av volframkarbid i titankarbid är motståndskraftig mot svetsverkan från de långa och sammanhängande stålspånen. Rent allmänt kunna de kubiskt ytcentrerade karbiderna av 4:e och 5:e gruppens metaller i periodiska systemet lösa stora mängder av 6:e gruppens metallkarbider under utbildning av substitutionslösningar, varvid alltså det kubiska ytcentrerade gittret bibehålles. Däremot kan 6:e gruppens karbider t. ex. den enkelt hexagonala volframkarbiden WC endast lösa obetydliga mängder av övriga karbider. En S-kvalitet visar i mikroskop en helt annan struktur än en G-kvalitet (fig. 6). Titanvolframkarbid föreligger i form av rundade, karakteristiskt färgade korn, medan den kvarvarande icke upplösta volframkarbiden fortfarande uppvisar den karakteristiskt skarpkantade grå kornformen. Däremellan synes kobolten som en vit fas. Ur forskningssynpunkt finnes mycket att göra i fråga om dessa kvaliteter. Dels är ännu ej helt klarlagt varför deras motståndskraft mot de sammanhängande spånen är så stor, dels öppnar sig ett stort fält för binära, ternära och kvaternära karbidsystem.

För studium av olika lösningsfenomen, av nya faser, av olika reaktioner i fast fas, för bestämning av kornstorlek hos pulver och så vidare använder man sig t. ex. av röntgenmetoder, metallografiska och mikroskopiska undersökningar, sedimentationsanalyser, magnetiska mätmetoder m. m. Den färdiga produkten underkastas även en omfattande kontroll av t. ex. hårdhet, böjhållfasthet, svarvegenskaper för svarvstål och provborrningar för bergborrar. Det fordras därför

för forskning och kontroll en ganska omfattande och dyrbar laboratorieutrustning. Man kanske frågar sig, om en forskningsinriktad verksamhet på detta relativt lilla område lönar sig. Allt tyder på att så är fallet. De större industrierna på området i Sverige och utlandet bedriva alla en relativt omfattande forskningsverksamhet och facklitteraturen översvämmas av artiklar om karbider, borider, nitrider och silicider med egenskaper lämpliga för hårdmetallegeringar (se t. ex. den nyutkomna ref.[3]). För själva hårdmetallen tycks man dock trots intensivt sökande, icke kunna hitta några bättre huvudbeståndsdelar än volframkarbid och kobolt, och här inriktar sig forskningsverksamheten huvudsakligen på förbättrade framställningsmetoder, förbättring av egenskaperna genom tillsatser av mindre mängder andra ämnen, förändring av legeringarnas struktur och sökande efter nya användningsområden. Av tyskarna lancerades under kriget volframkarbidfria hårdmetaller för svarvändamål, som innehöllo bl. a. vanadinkarbid och kromkarbid, men dessa voro snarast att betrakta som tillfälliga ersättningsmaterial på grund av råmaterialbrist. Av amerikanarna ha på senare tid lancerats hårdmetall, framställd genom sammansintring av kromkarbid Cr_3C_2 med nickel som bindemetall. Dessa legeringar sägas vara mycket korrosionsbeständiga men tycks ej ha funnit någon nämnvärd användning annat än till vissa specialändamål.

För närvarande koncentreras intresset alltmer på oxidationsbeständiga och varmhållfasta material bl. a. för gasturbinskovlar, detaljer till reamotorer för högtemperaturugnar och för de material, som komma att behövas, då atomenergin skall utnyttjas industriellt. Mycket tyder på att hårdmetalliknande legeringar, framställda på pulvermetallurgisk väg, här komma att få stor betydelse. Sålunda har i U. S. A. ett flertal sintrade legeringar huvudsakligen bestående av titankarbid och nickel, prövats för turbinskovlar vid höga arbetstemperaturer och ett intensivt sökande efter nya, lämpliga material pågår. Dessa material bör ha hög smältpunkt, god värmeledningsförmåga och måste kunna formas till lämpliga detaljer. Ett flertal av övergångsmetallernas karbider, borider, nitrider och silicider ha den erforderliga smältpunkten och ledningsförmågan, däremot är formningen av detaljerna och deras stora sprödhet ett stort problem. Här hoppas man dock att de pulvermetallurgiska metoderna skola kunna användas.

Litteratur

1. DRP. 420 689 (1923) och 434 527 (1925), Uppfinnare: Karl Schröter.
2. G. Sandström, Operation Granite, Industria International, 1953, 28.
3. P. Schwarzkopf and R. Kieffer, Refractory hard metals, New York 1953.

Ett talteoretiskt problem

Av konsul David F. Larsson, Stockholm

Problem 1850 (V. Thébault) i Elementas marshäfte 1953 kan generaliseras sålunda:

> Sök de heltalskvadrater som kunna spaltas i två hela tal (med bibehållen ordningsföljd för siffrorna) så beskaffade, att dubbla produkten av dessa tal är lika med den ursprungliga heltalskvadraten.

Betecknas det sökta talet $T=x\cdot 10^n+y$, där y är ett högst n-siffrigt och x ett ej närmare preciserat naturligt tal samt $n\neq 0$, får man

$$x\cdot 10^n+y=2xy \quad \text{och} \quad y=x\cdot 10^n:(2x-1)$$

Värdet $x=1$ måste förkastas, då det gör $y=10^n$, ett $(n+1)$-siffrigt tal. Då $(x, 2x-1)=1$ och $2x-1$ är udda, måste

$5^n\equiv 0 \pmod{2x-1}$, dvs. $2x-1=5^\nu$, där $0<\nu\leqq n$, varav

$$T=(5^\nu+1)^2\cdot 2^{n-1}\cdot 5^{n-\nu}$$

Då T skall vara jämn kvadrat, måste

$$n-1=2m\,(m=0,1,2,\ldots) \quad \text{och} \quad n-\nu=2k, \quad \text{varav}$$

$$\nu=2(m-k)+1\,(0\leqq k\leqq m).$$

Detta ger, med iakttagande av att $k\leqq m$

$$T=[5^{2(m-k)+1}+1]^2\cdot 2^{2m}\cdot 5^{2k}(m=0,1,2,\ldots;\ k=m,\ m-1\ldots 1,0).$$

Lösningarna fördela sig alltså i grupper svarande mot ett visst fixt m-värde för varje grupp. Varje grupp innehåller $m+1$ lösningar, som kunna betecknas $(T_\mu(m)$, där indices $\mu=0,1,2\ldots m$ svara mot k-värdena m, $m-1,\ldots 1,0$ resp.

Den allmänna termen i m-gruppen har formen

$$T_\mu(m)=(5^{2\mu+1}+1)^2\cdot 2^{2m}\cdot 5^{2(m-\mu)}$$

Här ger $\mu=0$ det minsta, $\mu=m$ det största talet (huvudlösningen) i m-gruppen. Följande tabell upptager de fyra första m-grupperna:

m	T
0	36
1	3600, 63504
2	360000, 6350400, 156350016
3	36000000, 635040000, 15635001600, 390635000064

Av tabellen och uttrycket för de $m+1$ lösningarna i m-gruppen synes, att i varje grupp finns utom den nämnda huvudlösningen m bilösningar, som erhållas, om $(m-1)$-gruppens m lösningar multipliceras med 10^2.

Huvudlösningen i m-gruppen har formen:

$$T_m(m)=(5^{2m+1}+1)^2 \cdot 2^{2m}$$

Om N^2 är ett på förhand fixerat kvadrattal, kan man för att bestämma antalet huvudlösningar $\leqq N^2$ använda följande metod.

Man har

$$N \geqq \sqrt{T_m(m)}=(5^{2m+1}+1) \cdot 2^m =$$

$$=5^{2m+1}(1+1:5^{2m+1}) \cdot 2^m \text{ och } < \sqrt{T_{m+1}(m+1)}$$

$\because \log N \geqq m \log 50+\log 5+P(m)$ och $m \leqq \dfrac{\log N-\log 5-P(m)}{\log 50} \cdot < m+1$

där

$$P(m)=\frac{1}{5^{2m+1}}-\frac{1}{2 \cdot (5^{2m+1})^2}+\frac{1}{3(5^{2m+1})^3}-\ldots$$

Därav följer (när $[t]$ betecknar det största hela tal, som ej överstiger t), att

$$m=[(\log N-\log 5-P(m)):\log 50]$$

som i allmänhet kan ersättas med $[^{10}\log N/5 : {}^{10}\log 50]$, då till följd av olikheterna

$$0<\frac{P(m)}{\log 50}<\frac{1}{5^{2m+1} \cdot \log 50}<\frac{1}{3{,}9 \cdot 5^{2m+1}}$$

uteslutandet av termen $-P(m):\log 50$ endast undantagsvis påverkar m-värdet och därmed det sökta antalet $m+1$.

Om $\log N/5:\log 50$ överstiger ett heltal med en kvantitet som är $<1:5^{2m+1} \cdot \log 50$, måste feluppskattningen skärpas, så att man ej får ett resultat, som är en enhet för stort, genom att lita på det förenklade uttrycket för m.

Till slut några anmärkningar angående frekvensen av s.k. huvudlösningar. För $N^2=10^{20}$ får man $m=[5{,}475]=5$. Det finns alltså sex huvudlösningar $<10^{20}$. Om på ett jättemåttband, som tänkes lagt runt jorden längs ekvatorn (40 000 km), millimeterstrecken få representera

de hela talen, så finns på denna sträcka endast tre huvudlösningar till problemet, ty här är $m=[2{,}709]=2$.

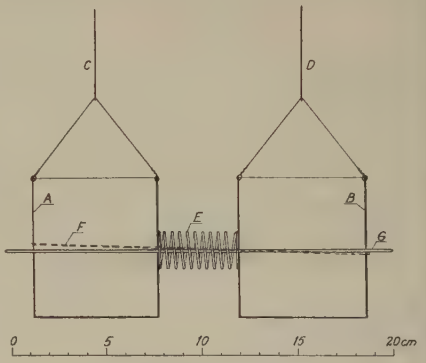
För att man skall få in ytterligare en huvudlösning på måttbandet måste det förlängas så, att det går att veckla i det närmaste ytterligare nio gånger runt ekvatorn, ty $T_3(3)/4 \cdot 10^{10}=9{,}8$.

Totala antalet huvud- och bilösningar upp till viss fixerad gräns ($\leqq N^2$) kan bestämmas på liknande sätt, varvid dock måste observeras, att i $(m+1)$-gruppen finns bilösningar, som understiga huvudlösningen i m-gruppen, så snart $m \geqq 2$.

Notiser

Impulsförsök

Bifogade figur visar en enkel anordning som användes vid Tekniska Museet i Stockholm för demonstration av några av de grundläggande lagarna för rörelse. Två cylindriska öppna bleckburkar A och B hängas upp i jämlöpande lätta pendelsnören C och D, några meter långa. Mellan burkarna anbringas en löst anliggande spiralfjäder E, som hålles spänd medelst en omkring burkarna lagd slinga F av björntråd. Det hela styres av en genom hål i burkarna trädd strumpsticka G. Brännes nu tråden av, exempelvis med hjälp av en tändstickslåga, slungas burkarna i väg åt var sitt håll, och de få därvid båda lika stor *impuls* eller *rörelsemängd*. Ha burkarna lika stora massor, bli utslungningshastigheterna åt resp. håll lika stora. Ökas den ena burkens massa genom någon extra belastning blir dess utslag mindre, medan den andra burkens utslag ökar. Utslagen kunna mätas antingen direkt medelst uppställda markeringskäppar eller genom utmärkning av burkskuggornas rörelse på en vägg.



Försöksanordningen. Spiralen E kan bestå av 1,4 mm hård ståltråd, lindad med 10—12 varv och med en yttre diameter av 20 mm.

Det mekaniska förloppet kan beskrivas på följande sätt utan hänsynstagande till den lätta spiralfjäderns massa. Under varje tidselement av fjäderexpansionen utsättas de båda burkarna för lika stora krafter,

riktade åt motsatta håll. Då verkningstiden i båda fallen är densamma, blir produkten av kraft och tid (riktigare: kraftens tidsintegral), *impulsen*, lika stor för de båda burkarna (ehuru med motsatt tecken). Kraftlagen uttrycker, att kraften är lika med accelerationen gånger massan. Tidsintegreras de båda leden i denna ekvation, framgår omedelbart, att impulsen är detsamma som den till kropparna överförda *rörelsemängden*, produkten av massan och hastigheten. Härur följer direkt, att om burkarna ha olika massor, bli utslungningshastigheterna omvänt proportionella mot resp. massor. Uttrycket för rörelseenergien, halva produkten av massan och hastighetens kvadrat, visar att även energien fördelas med omvänd proportionalitet mot massan. Vid måttliga rörelser äro pendelutslagen direkt proportionella mot utgångshastigheterna, och försöket åskådliggör då direkt hastighetsfördelningen mellan kropparna.

Då anordningen arbetar nästan friktionslöst, illustrerar den ganska väl förloppet vid elastisk stöt. Vid oelastisk stöt kompliceras förloppet därigenom att energi även fördelas vid inre omsättningar inom de medverkande kropparna. Försöket levandegör för åskådaren några väsentligheter ur rörelseläran på ett sätt som i många fall kan göra närmare förklaringar onödiga. Anknytning kan lämpligen göras till praktiska exempel, såsom raket- och reaktionsdrift eller till rekylverkan vid skjutvapen. De visade lagarna gälla också vid många partikelstötförlopp inom molekylar- och atomfysiken.

Torsten Wilner

Newtons tredje rörelselag

Enligt Pohl, Mechanik und Akustik, demonstreras Newtons tredje rörelselag genom att två personer stå på var sin vagn och hålla i samma rep; den ene drar, och båda röra sig mot varandra. Anordningen är säkert lämplig för Pohls jättelika auditorium, men för ett svenskt läroverks fysikinstitution är den alltför skrymmande och onödigt dyr.

Idén kan utvecklas i mindre skala på följande sätt, som — det må framhållas — ej gör anspråk på att vara nytt eller originellt. Man inköper ett leksakståg av trä, bestående av lokomotiv och två likadana vagnar. Den ena vagnen lastas med vikter, och loket kopplas för med en centimeterbred, ca 2 dm lång remsa av kofferdam. För man loket framåt med handen, sträckes gummiremsan på grund av friktionsmotstånden i vagnen. Med båda händernas hjälp stoppas tåget med bibehållet inbördes avstånd mellan lok och vagn. Loket släppes och går bakåt. Hästen drager stenen, säger Newton i sin förklaring till tredje rörelselagen, men stenen drager också hästen, nämligen bakåt. För nutida bruk kan ju hästen ersättas med lok.

En centimetergraderad linjal lägges på experimentbordet. De båda vagnarna belastas lika och sammankopplas med hjälp av gummiremsan. Man håller en vagn vid vardera änden av linjalen på bordet, varvid gummiremsan givetvis blir kraftigt sträckt. Släpper man samtidigt med båda händerna, kollidera vagnarna precis vid mitten av linjalen, så som Newtons tredje lag kräver. Vill man visa, att krafterna äro lika icke blott i detta symmetriska fall, kan man belasta så, att det ena ekipaget får dubbelt så stor massa som det andra. Krafternas likhet kräver nu — enligt andra lagen — att det lättare ekipaget i varje ögonblick får dubbelt så stor acceleration som det tyngre. De av resp. tyngdpunkter tillryggalagda vägarna måste då förhålla sig som 2:1 (trots att accelerationen icke är likformig). Det torde vara onödigt att bevisa detta strängt. Försöket ger förhållandet 2:1, varvid man naturligtvis inte får begära någon alltför stor noggrannhet. I det senare försöket utgör friktionen en felkälla, då den ju är större för det tyngre ekipaget, så att de accelererande krafterna ej bli lika. Felet blir av mycket ringa betydelse, om man har en kraftigt spänd gummiremsa.

Försöken avse ej i främsta rummet att ge en kvantitativ verifiering utan att skänka det upplevdas realitet åt en grundläggande mekanisk lag. *Erik Walles*

Kastparabeln

Idén till detta försök fick jag för åtskilliga år sedan ur en gammal laborationsredogörelse av för mig okänt ursprung, och då jag tyckt mig kunna konstatera, att försöket ej är mera allmänt känt bland fysiklärare, vill jag här lämna en kort beskrivning.

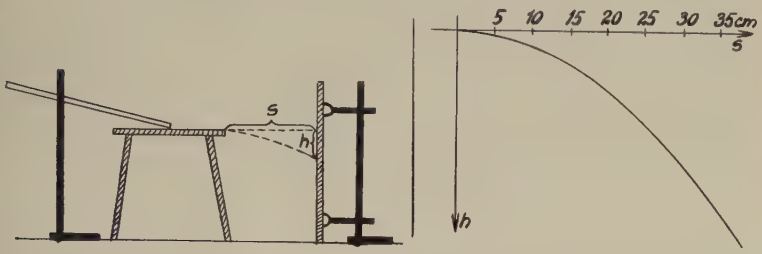
Försöket är avsett att utföras som laborationsförsök i realskolans avslutningsklass, och behövlig materiel är två stativ, en stol (pall), ett 75 cm långt järnrör (s. k. pansarrör för elektrisk installation sågas i 4 delar), en kullagerkula med 12 à 15 mm diameter samt ett ritbräde.

Järnröret fästes som figuren visar, varvid nivåskillnaden mellan dess övre och undre ända bör vara 15 à 20 cm. På ritbrädet fästes ett vitt papper och över detta ett karbonpapper, som endast fastgöres i övre kanten. Ritbrädet fastsättes i lodrät ställning i ett stativ och placeras intill stolens kant. Stålkulan släppes genom röret och får träffa ritbrädet, varvid ett märke uppstår på papperet. Därefter flyttas ritbrädet 5 cm från stolen, varvid man tillser, att brädet står parallellt med stolkanten och stålkulan släppes 3 à 4 gånger genom röret. Därefter är det lämpligt att låta laboranterna lyfta på karbonpapperet och sätta en siffra vid de märken man nu fått, så att man vid slutbehandlingen kan avgöra vilka märken, som hör samman med varje särskilt avstånd mellan ritbrädet och stolkanten. Detta avstånd ökas sedan med

5 cm mellan varje försök, tills det uppgår till 35 à 40 cm, då märkena pa papperet brukar ligga i närheten av karbonpapperets nedre kant.

Man mäter sedan hur långt kulan fallit vid varje särskilt försök, och slutligen uppritas ett diagram över sambandet mellan avståndet (s) och fallhöjden (h), varvid kastparabelns nedåtgående gren framkommer.

Försöket är lätt att utföra och kräver ingen dyrbar apparatutrustning, varför det är lämpligt som laborationsförsök.



Man kan givetvis även ordna försöket så, att kulans utgångshastighet blir riktad snett uppåt, varvid man även får med en större eller mindre del av kastparabelns uppåtstigande gren. Kulans utgångshastighet måste då vara större och röret följaktligen längre. Dessutom har det visat sig svårt att ge kulan denna snett uppåtriktade utgångshastighet genom att endast luta stolsitsen, eftersom vinkeln mellan denna och röret måste vara ganska liten för att kulan ej skall studsa. Röret måste då helst vara krökt i sin nedre ända, och apparaturen blir då betydligt mera komplicerad, skrymmande och kostnadskrävande.

Harald Magnusson

Uppgift 5 i specialmatematik, reallinjen, nov. 1953

hade lydelsen (se Elementa 36 (1953) 297): »*O* är toppen i en kon, vars basyta är en ellips. Konens höjd råkar basytan i dess medelpunkt. Ellipsens storaxel *AB* har längden $2a$. Den mindre axeln är *CD*. Sträckan *OA* är aritmetiskt medium till ellipsens axlar, och vinklarna *OAB* och *OCD* förhåller sig som 2:3. Hur stor är konens volym?»

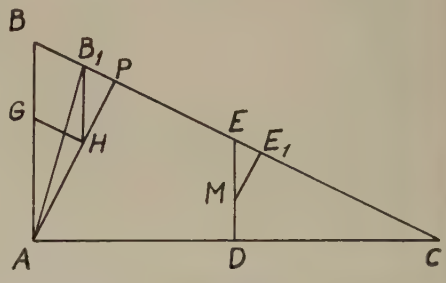
Följande vackra lösning av Björn Froste, elev i R III[3] vid Högre allm. lärov. i Karlskrona, har insänts av läroverksadj. M. Fröberg.

Beteckningar: (*P* ellipsens medelpunkt) $AP=a$; $CP=b$; $AO=a+b$. Triangeln *OCP* vrides ett kvarts varv kring *OP*, varvid *C* faller i C_1. Triangeln AOC_1 likbent; $\angle AOC_1=\angle OC_1A=67{,}5°$; $\angle OAC_1=45°$; $OP=a$; $b=a\cot 67{,}5°=a(\sqrt{2}-1)$ osv.

Uppgift 8 i studentexamen, latinlinjen, nov. 1953

hade lydelsen (se Elementa 36 (1953) 295): »Höjderna i triangeln ABC eller deras förlängningar skär varandra i punkten H. Bevisa, att avståndet AH är dubbelt så stort som avståndet från den omskrivna cirkelns medelpunkt till sidan BC, såväl då vinkeln A är spetsig som då den är trubbig.»

Man kan visa påståendet genom att studera hur höjdernas skärningspunkt H och omskrivna cirkelns medelpunkt M förflytta sig, då vinkeln A förändras från en rät vinkel till en spetsig (eller en trubbig). Då A är rät, befinner sig H i A och M i (mittpunkten på BC) E. Då B förflyttar sig utefter den fasta linjen BC, t. ex. till B_1, rör sig mittpunkten på sidan B_1C hälften så långt, till E_1. H rör sig utefter den fasta normalen AP och M utefter den fasta mittpunktsnormalen DE. Trianglarna AGH och MEE_1 äro likformiga, och enär $GH=BB_1=2EE_1$, är alltid $AH=2ME_1$. Man får en motsvarande figur, om vinkeln A ökar från en rät till en trubbig vinkel.



Sven Hilding

En studentuppgift och en triangelsats

Lektor Walter Schock, Stockholm, har riktat red.:s uppmärksamhet på att uppg. 8 i fyllnadsprövning på latinlinjen i januari 1953 kan behandlas med hjälp av en enkel triangelsats. Uppgiften lyder (se Elementas marsh. 1953, s. 68):

> En höjd i en triangel delar en av triangelns bisektriser mitt itu och delas själv av denna i förhållandet 1 : 3. Visa, att triangeln är likbent, och beräkna det exakta värdet av förhållandet mellan en av de lika sidorna och den tredje sidan.

Triangelsatsen ifråga är följande:

> Om från en triangels hörnpunkter A, B, C linjer dragas genom en punkt P och dessa träffa motstående sidor i resp. A_1, B_1, C_1, så gäller relationen

$$\frac{A_1P}{A_1A}+\frac{B_1P}{B_1B}+\frac{C_1P}{C_1C}=1.$$

Man inser omedelbart det enkla beviset för denna sats. Om båda membra multipliceras med T, ytan av triangeln ABC, uttrycker ju

relationen att summan av deltrianglarna BCP, ACP, ABP är lika med T. — Det kan tilläggas, att P får ligga var som helst i planet, om blott förhållandet, t. ex. A_1P/A_1A räknas positivt, då P ligger mellan A och A_1 och negativt, då P ligger på förlängningen av AA_1.

Vid beviset förfar man ju på samma sätt som vid beräkning av de in- och vidskrivna cirklarnas radier. Satsen bör därför kunna göra god tjänst som övningsuppg. vid undervisningen. — Att en liknande sats gäller för en tetraeder inses omedelbart.

I »Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht». 6. Bd. September 1953, sid. 170 gör R. Laemmel, Zürich, gällande, att satsen ifråga är föga bekant i de kretsar han känner. Då den inte heller här i landet torde vara allmänt känd, har det synts motiverat med ett omnämnande.

Första delen av studentuppgiften löses nu så: Om AA_1 är höjd och BB_1 bisektris, så har man $1:2+1:4+C_1P:C_1C=1$, varav följer att $\triangle ABP=\frac{1}{4}T=\triangle BCP$; BB_1 är alltså median och triangeln likbent.

C. E. B.

Vätskors ångtryck

För demonstration av vätskors ångtryck och för att visa att en vätska ökar trycket med sitt partialtryck, då den inneslutes i t. ex. en kolv kan man göra följande enkla experiment.

I en 5- eller 10-ml pipett suger man upp eter till ca $\frac{1}{3}$ av pipettens volym. Den ovane nybörjaren är rädd för att förlora någon droppe i känslan av att eter är en »lättrörlig» vätska. Han vänder därför pipetten i vågrätt läge eller så att spetsen kommer något högre. Etern rinner då ut över pipettens hela volym, ytan förstoras och jämvikt inställer sig hastigt i gasfasen. Det övertryck, som uppstår i pipetten är tillräckligt för att etern i en kraftig stråle lämnar pipetten. Genom att upprepa försöket med pipetten väl fylld med eterånga kan man visa, att effekten då uteblir eller i varje fall är minimal.

Harry Hellström

Elströmmens värmeverkningar. Ett demonstrationsförsök för realskolan

Tre likadana doppvärmare kopplas på så sätt till nätet, att två av dem bli sinsemellan parallellkopplade och den tredje seriekopplad med dem. Doppvärmarna ställas i var sin termosbägare med 500 g vatten och en termometer. Strömmen hålles sluten så länge, att temperaturen stiger åtminstone 1° i en av de »parallella».

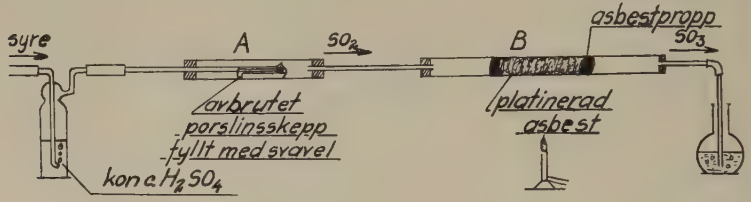
Det är självklart för eleverna, att strömstyrkorna förhålla sig som $1:1:2$, men det visar sig bli en överraskning för dem, att temperaturökningarna förhålla sig som $1:1:4$. På detta enkla sätt demonstreras alltså effektlagen RI^2 särdeles påtagligt.

Det brukar gå bra med vanliga doppvärmare, men man bör övertyga sig om, att inte någon av dem händelsevis ger annan effekt. En variant av försöket är att ha 500 g sprit i stället för vatten i en av termosbägarna — då belyses samtidigt begreppet specifikt värme.

Bertil Englund

Syntes av svavelsyra

Utgångsämnen: svavel, syre, vatten.



A och B äro svårsmälta glasrör. I A förbrännes svavlet till svaveldioxid. Syret ledes genom ett vanligt glasrör till bortre änden av skeppet. Allt efter som svavlet brinner upp, drages syrgasröret åt vänster varigenom förbränningen i A kan regleras.

Paul Carlsson

En enkel, billig och effektiv gasometer

Handelns färdiga gasometrar ha i den mån de äro avsedda för skolbruk fyra eller om priset medtages fem fel: gasbehållaren är för stor, vattenbehållaren är för liten, trycket är variabelt och man glömmer vanligen att fylla på vatten. Alla dessa olägenheter elimineras om man till gasometer apterar en trehalsad Wulffs flaska, som inte behöver rymma mer än 2 liter; ja man kan kosta på sig en uppsättning av tre gasometrar med 1, 1,5 och 2 liters volym. I den mellersta halsen ett till botten gående 10 mm glasrör, ovanför proppen förlängt med ett 22 mm vitt, 40 cm långt stigrör. I den ena sidohalsen ett vinkelböjt kranrör för gasens uttag, i den andra ett till botten gående glasrör, över proppen omböjt snett nedåt. Detta glasrör förbindes med vattenledningen. Man driver således ut gasen med vattenledningsvatten och det är mycket lätt att ställa in på ett stationärt övertryck, som avläses på de centrala nivåröret.

G. Starck

Aktuellt

Den totala solförmörkelsen den 30 juni 1954

behandlas i en artikel av Jöran M. Ramberg, observator vid Stockholms observatorium, Saltsjöbaden, i Populär astronomisk tidskrift, h. 3—4, 1953. Red. vill rikta uppmärksamheten på denna uppsats, som ger den intresserade en mycket god orientering. Här återges bl. a. kartor, omfattande Sverige—Norge—Danmark, över tidpunkten för den partiella förmörkelsens början, för dess maximum och för dess slut samt en större karta över totalitetszonen med centrallinjen i riktning från Strömstad över norra Öland. I uppsatsen redogöres även för planerade vetenskapliga observationer.

De nämnda kartorna med tidsangivelser i svensk borgerlig tid kommer att i något förändrat skick utges på Almqvist & Wiksells förlag under titeln: Karta över den totala solförmörkelsen den 30 juni 1954, med förklarande text av Jöran M. Ramberg.

I Elementas junihäfte, som beräknas utkomma redan i mitten av maj, kommer Åke Wallenquist, observator vid Uppsala observatorium, att skriva en artikel av stort intresse för Elementas läsare. Artikeln kommer att behandla solförmörkelseobservationer, som kan utföras med mindre instrument av icke-fackmän.[1]

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning

höll ordinarie årsmöte den 4—5 januari 1954. Första dagens förhandlingar var förlagda till Saltsjöbaden, där man kl. 10 samlades å Grand Hotell Saltsjöbaden till sedvanliga årsmötesförhandlingar. Till ordförande omvaldes lektor Ernst Knave, Stockholm. I styrelsen skedde endast den förändringen att lektor Torsten Jönsson, Stockholm, invaldes i st. f. fil. dr Iwan Bolin, som avböjt återval. De förutvarande revisorerna adjunkterna Einar Strand och Bertil Broström omvaldes, likaså revisorssuppleanterna rektor Ernst Herlin och lektor Carl-Gustav Danver.

Årsmötet beviljade ett anslag av 50 kronor till Nordisk Matematisk Tidskrift, att användas som pris i en matematisk pristävlan. — Sekreteraren, lektor Bror Gustaver, lämnade några meddelanden, bl. a.

[1] Red. har blivit ombedd påpeka, att i Hellsten, Fysik o. astronomi III, 11:e uppl. (1953), s. 113 och 115, tiderna för förmörkelsen av förbiseende angivits i Greenwich-tid; de bör alltså ökas med en timme.

att föreningen hos K. Skolöverstyrelsen ansökt om ett anslag å 7000 kr. till en fortbildningskurs i fysik och kemi vid Statens provningsanstalt i Stockholm, samt att sjätte delen av föreningens pedagogiska skriftserie, som kommer att omfatta fysikaliska uppgifter, beräknas utkomma under våren 1954.

Under dagen hölls föredrag av lektor Arvid Leide, Lund, över ämnet »Granskning och eftergranskning av studentstilarna i matematik och fysik», av docent Nicolai Herlofson, Stockholm, om »Radioastronomi» och av docent Erik Ingelstam, Stockholm, om »MKSA-systemet som grund för skolans fysikundervisning». Lektor Leides föredrag jämte diskussion kommer att refereras i Elementas junihäfte. I fråga om docent Herlofsons föredrag hänvisas läsaren till dennes artikel i Kosmos bd 30 (1952) och beträffande docent Ingelstams föredrag till Elementas septemberhäfte 1953, s. 173, där frågan beröres i annat sammanhang.

Som huvudpunkt på dagens program får man väl betrakta besöket på Stockholms Observatorium vid Saltsjöbaden. Efter ett orienterande föredrag av professor Bertil Lindblad om observatoriets arbetsprogram vidtog visning i grupper under ledning av observator J. Ramberg, docent T. Elvius, assistent Gunnar Larsson-Leander och amanuens U. Sinnerstad.

Dagen avslutades med gemensam middag å Grand Hotell. Vid middagen kåserade observator Ramberg om sommarens totala solförmörkelse.

Andra dagens förhandlingar var förlagda till Tekniska Museet i Stockholm, tack vare sina resurser en idealisk möteslokal för en naturvetenskaplig förening. Intendent Torsten Althin talade om »Ett tekniskt museums roll i undervisningen», varvid mycket beaktansvärda synpunkter framfördes. Civilingenjör Torsten Wilner demonstrerade museets »Atomarium» och utförde härvid åtskilliga av de vackra försök som beskrivits i notisen om atomariet i Elementas marsh. 1953, s. 38, och i uppsatsen om Wilson-kammaren i dec.h. 1953, s. 265.

Fil. mag. Ingemar Hjerpe demonstrerade med hjälp av tre elever från Söderköpings samrealskola ett tiotal laborationsförsök i kemi. De skickligt utförda försöken bjöd på en hel del nya och intressanta detaljer. Ett par av dessa med särskilt intresse må nämnas. Den ena var en enkel och tillförlitlig gasspärr, som tillät införandet av noggrant uppmätta gasvolymer, t. ex. 2 liter pr timme, i ett reaktionskärl. Den andra detaljen var en enkel anordning för demonstration av giftiga och illaluktande gaser, såsom klor, utan användning av avdrag. Bland försöken kan nämnas en masugn, där järnoxid reducerades med kolmonoxid i en elektrisk ugn, en svavelsyrafabrik (framställning av

svaveldioxid och svaveltrioxid), bestämning av luftens sammansättning samt demonstration av Avogadros lag.

Efter lunch å Källhagens restaurang vidtog visning av fysikalisk undervisningsmateriel med experiment. Ingenjör Stig Lindholm, Stockholm, utförde några instruktiva försök med en engelsk tvåstegs vakuumpump, som firman Norstedt saluför, mångsidigt användbar och av allt att döma praktisk och effektiv. Ingenjör L. gjorde även några elektriska interferensförsök med en av firman tillverkad kortvågsändare (10 cm våglängd) och visade till slut en kontinuerligt verkande dimkammare (se T. Wilner, Elementas dec.h. 1953), där avkylningen åstadkommes med kolsyreånga i st. f. med kolsyreis.

Dr A. Lindberg från firma E. Leybold's Nachfolger, Köln, höll till sist föredrag med demonstrationer om några av firmans nykonstruktioner. Dr. L. framförde nu delvis samma försök som vid demonstrationen i Göteborg i oktober 1953 beskrivna i Elementas dec.h. 1953, s. 270. Dessutom redogjordes ingående och gjordes vackra försök med en elektrisk kortvågsändare. För närmare beskrivning hänvisas till firman, som förmodligen kan stå till tjänst med lämpligt firmatryck.

Årsmötet hade god anslutning, och föreningen hade glädjen att som nordiska gäster se lektor L. Melchior Larsen, Århus, Danmark, lektor fru Salome Hollo, Helsingfors, Finland, och lektor Hans Birkeland, Sandvika, Norge.

Den andra nordiska kongressen för matematik-, fysik- och kemilärare

kommer att äga rum i Århus, Danmark, 3—6 augusti 1954 enligt inbjudan, som utsänts av Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier och Foreningen af Fysik- og Kemilærere ved Gymnasier og Seminarier i Danmark. Den första kongressen av detta slag hölls i Åbo 7—10 augusti 1951; se Elementa 34 (1951), 174.

Kongresslokal blir Århus universitet. Föredrag och förhandlingar uppdelas på en sektion för matematik och en för fysik-kemi. För båda sektionerna gemensamma möten kommer även att hållas.

Kongressbestyrelsen har översänt en preliminär förteckning på vid kongressen medverkande. Danmark: professorerna Jakob Nielsen, Børge Jessen, Sv. Werner, Hakon Lund, Fabricius Bjerre, rektor P. Rubinstein och lektorerna E. Rancke Madsen och Mogens Pihl. Finland har anmält föredrag till matematiksektionen. Norge: rektor A. Gjelsvik, lektor J. O. Øgrim, amanuens J. H. Ormestad.

Sverige kommer att bidraga med ett föredrag av lektor O. Lundquist, Lund, över ämnet »Optiska avbildningsfel vid linser» samt med en ännu ej fastställd programpunkt.

Under kongressen blir det en mottagning på Århus rådhus, kongress-

middag och en utflykt till Mols. Ett särskilt program ordnas för deltagande familjemedlemmar.

Om anslutningen blir tillräckligt stor, ordnas efter kongressen en fem dagars rundresa per buss med avresa från Århus den 7 aug. genom trakten kring Himmelbjerget, till Jyllands västkust, genom Sønderjylland, Fyn och Sjælland till København.

Definitivt program blir färdigt först omkring 1 mars. Då anmälan till kongressen utgår den 25 april och Elementas andra häfte för året utkommer först i mitten av maj, kommer detta program ej att kunna publiceras i tidskriften. Medlemmarna i Föreningarna för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm och Lund kommer att delges programmet genom resp. sekreterare. Övriga intresserade svenskar kan erhålla upplysning genom lektor Bror Gustaver, Nyodlingsvägen 7, Bromma.

Till bestridande av omkostnader för svenska lärares deltagande i kongressen har Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm fått mottaga ett bidrag av statsmedel å 3000 kr.

Industriens Upplysningstjänst inbjuder till sin nionde industrikurs

Under tiden 16—22 juni 1954 anordnar Industriens Upplysningstjänst en kurs för geografi- och kemilärare vid läroverk, seminarier och folkhögskolor. Tack vare ekonomiskt bidrag från centrala industriorganisationer har det varit möjligt för Upplysningstjänsten att inbjuda till dylika kurser sedan 1946; de första sju åren för enbart geografilärare, 1953 för kemilärare (se Elementa 36 (1953) 181).

Årets kurs beräknas starta i Kalmar, varefter skilda industrier i Småland och ev. Östergötland blir föremål för studier. Under ett antal föreläsningar lämnas aktuell orientering rörande industrien i Sverige och dess problem.

Kursen anordnas i samarbete med Geografilärarnas riksförening och Föreningarna för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm och Lund. I början av april utgår inbjudan till alla medlemmar av dessa föreningar.

Upplysningstjänsten svarar för alla kostnader med undantag av fördelade resekostnader, vilka torde uppgå till ca 50 kr.

Bokanmälningar

W. V. D. Hodge and D. Pedoe, *Methods of Algebraic Geometry*, Volume II, Cambridge Univ. Press 1952, Pp. 394, 42s. net.

Den algebraiska geometrien har under de senaste decennierna tilldragit sig allt mera intresse, något som bl. a. avspeglas i produktionen av läroböcker och monografier på området efter kriget. Karakteristiskt för utvecklingen har varit att teorien har fått en sträng, axiomatisk uppbyggnad. T. o. m. uppmärksamma 2-betygsstuderande bör ha känt behov av detta, då de träffat på algebraisk metodik i geometrikursen. (Vad är egentligen två sammanfallande punkter på en kurva?) Dessutom ha många nya, djupt liggande resultat erhållits och nya metoder utvecklats.

Den föreliggande boken utgör volym II av ett större arbete. Volym I recenserades i Elementa 31, sid. 179 (1948). På de i volym I omsorgsfullt lagda algebraiska grundvalarna bygger författarna i volym II en allmän teori för algebraiska varieteter (mångfalder) i projektiva rum. Därefter tillämpas denna teori på två viktiga specialfall: Andragradsvarieteter (»quadrics») och Grassmanska varieteter.

Verket är ej lättillgängligt för läsare som sakna kännedom om moderna algebraiska begreppsbildningar och metoder. En tredje volym skall utkomma, men det är redan nu möjligt att påstå att verket kommer att tillhöra standardlitteraturen inom den algebraiska geometrien. Framställningen förenar stränghet med åskådlighet, vilket är ovanligt inom detta område, där böckerna ofta sakna minst en av dessa egenskaper. *Hans Rådström*

W. E. Milne, *Numerical Solution of Differential Equations.* John Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1953. Pp. XI+275, $ 6.50.

Detta är en modern och vederhäftig handbok för envar som har anledning att lösa differentialekvationer numeriskt. Tekniken inom detta konsthantverk har gått framåt mycket de sista decennierna, och en ny auktoritativ framställning som denna är mycket välkommen. Innehållet är delvis gemensamt med det i Collatz' 1951 utgivna »Numerische Behandlung von Differentialgleichungen», men i själva verket kompletterar böckerna varandra ganska bra, då Milne's är elementärare hållen och anordnad »for the benefit of the practical computer».

För ordinära differentialekvationer behandlas begynnelsevärdeproblem mycket utförligt i sex välskrivna kapitel. De torde vara tillgängliga och användbara även för läsare med ganska begränsade teoretiska förkunskaper. När det gäller val av metod, anordning av räknekontroller m. m. är den praktiska erfarenheten väl så viktig som det teoretiska kunnandet, och Milne är även i det avseendet pålitlig, så vitt anmälaren kan döma. Dock tycks han ha fattat agg till Runge-Kuttas' metod; det exempel han ger (s. 75) på dennas undermålighet är i vart fall orättvist upplagt, och orättvisan borde vara uppenbar för ett opartiskt öga. Detta är synd, då Runge-Kuttas' metod har flera klara fördelar vid räkning med siffermaskiner, och därför kan väntas få ökad användning i den närmaste framtiden.

De övriga kapitlen behandlar i tur och ordning: (7) randvärdeproblem vid ordinära differentialekvationer, (8) lineära, paraboliska och hyperboliska partiella differentialekvationer, (9) lösning av lineära algebraiska ekvationssystem, inversion av matriser och bestämning av egenvärden till matriser, (10) elliptiska partiella differentialekvationer, och (11) egenvärdeproblem vid ordinära och partiella differentialekvationer. Tre korta appendices behandlar avrundningsfel, siffermaskiner och Monte-Carlo-metoder.

Dessa kapitel är mera summariska och koncisa och mindre lättillgängliga än de sex första, men kompletteras lyckligt av mycket omfattande litteraturanvisningar. (Sammanlagt innehåller bibliografien 258 titlar.) Flera intressanta nya metoder och erfarenheter refereras, och läsaren sättes å jour med nu pågående undersökningar.

En rikhaltig samling lösta och olösta exempel ökar bokens värde som lärobok, både vid högskola och vid självstudium.

Göran Kjellberg

G. Herdan, *Small Particle Statistics*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam 1953, Pp. 520, 70s.

En bok som behandlar problem i samband med bestämning av partikelstorlek välkomnas både av fysiker, kemister och statistiker. Ämnet är aktuellt för den keramiska industriens, cementfabrikernas och glasbrukens provningslaboratorier och för åtskillig teknisk forskning som bedrives på andra håll. I föreliggande bok, som är den första i sitt slag, ges en detaljerad översikt både över tillgänglig metodik (mikroskopiska metoder, adsorptions- och sedimentationsmetoder m. m.) och över den statistiska analysen av det erhållna siffermaterialet. Innehållet är därför mångsidigare än titeln ger anledning förmoda.

Boken är avsedd att kunna tjänstgöra som första lärobok i statistik för alla, som ägnar sig åt »partikelproblem». Som sådan är den trots

välskrivna partier om t. ex. korrelation och provtagning icke lämplig utan komplettering med en modern lärobok i ämnet. Den nyare statistiska utvecklingen har nämligen icke beaktats i tillräcklig utsträckning. Åtskilligt äldre formelgods tynger framställningen och hindrar läsaren att uppskatta statistikens värde som hjälpmedel i det dagliga arbetet.

Typografien är förstklassig. De talrika litteraturhänvisningarna ger goda utblickar över hithörande fysikalisk, kemisk och statistisk litteratur. *Gunnar Blom*

N. Bourbaki, *Éléments de mathématique.* Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann & Cie, Paris.

De första 12 häftena av detta verk recenserades av anmälaren i Elementa 34 (1951), s. 179 (för detaljer om verket, se denna recension). Sedan dess har dels ytterligare 4 nya häften utkommit, dels har några av de äldre häftena, som varit slutsålda, utkommit i nya omarbetade upplagor, nu med nya nummer i serien »Actualités Scientifiques et Industrielles».

Nyutkomna: Livre II Algèbre XIV (No. 1179); Livre III Topologie générale (Fascicule de résultats) XVI (1196); Livre V Espaces vectoriels topologiques XV (1189); Livre VI Intégration XIII (1175).

Nya upplagor: Livre I Théorie des ensembles I (1141); Livre II Algèbre IV (1144); Livre III Topologie générale II (1142), III (1143). *Olof Hanner*

H. Schubert—F. Fitting, *Mathematische Mussestunden,* 11. Aufl. W. de Gruyter, Berlin 1953, 271 S., DM 7,20.

Boken innehåller i 27 kapitel beskrivning och lättfattlig analys av många av de klassiska lekar och sällskapsspel av matematisk natur, som roat åtskilliga generationer, t. ex. olika varianter av konststycket att gissa tal, som någon tänker på, leken, där det gäller att genom växelvis addition först nämna ett visst tal, konststycken med hjälp av tärningar osv. Dessutom finns några kapitel av mera populärvetenskaplig natur, t. ex. om pytagoreiska tal, geometriska felslut, topologiska frågor i samband med ritande av figurer utan att lyfta pennan från papperet m. m. S. k. magiska kvadrater behandlas tämligen detaljrikt.

Bokens första upplaga utkom 1897. Att den sedan dess under smärre omarbetningar utkommit i elva upplagor är i och för sig en god rekommendation och visar att den inom sitt område träffat den rätta tonen. *Sven Hilding*

D. G. Northcott, *Ideal Theory.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics No. 42. University Press, Cambridge 1953, Pp. 111, 12s. 6d.

Idealteorin hör till algebran. Grundad på ringbegreppet och uppbyggd med enkla axiom har den i sin moderna form en abstrakt, formell karaktär. En av de matematiska discipliner som givit anledning till dess uppkomst är den algebraiska geometrin. För närvarande är idealteorin ett huvudverktyg vid arbetet på att förse den algebraiska geometrin med adekvata grundvalar.

Föreliggande bok tar sikte på de geometriska tillämpningarna i så måtto, att den innehåller de idealteoretiska resultat, som äro av särskild betydelse för geometrin. Dessa resultat framläggas i en sammanhängande, rent algebraisk teori. Av bokens fem kapitel ägnas tre åt den allmänna teorin för Noetherska ringar, medan de återstående två behandla lokala ringar, dvs. Noetherska ringar med endast ett maximalt ideal. Boken avslutas med intressanta orienterande upplysningar om den historiska utvecklingen m. m. Framställningen är smidig och fri från tyngande omständlighet. *Christer Lech*

Olof Sjöstrand, *Differential- och integralkalkyl för tekniska läroverk,* Gumperts förlag, Göteborg 1953, 211 s., kr. 16:—.

Man tycker, att det borde vara onödigt med ännu en lärobok i differential- och integralkalkyl, det finns ju en sådan uppsjö på dem. Men ändå fyller Sjöstrands lärobok »ett länge känt behov». Vid de tekniska läroverken är matematiken intimt sammanknuten med de tekniska ämnena, och de senare pressar hårt på den förra. Särskilt integralkalkylen skall fram tidigt. Sjöstrand har därför vävt samman derivator och integraler på ett i Sverige ovanligt sätt. Denna sammanvävning har dock på senare tid blivit vanlig i engelska och amerikanska läroböcker (se t. ex. läroböcker av Hardy, Franklin m. fl.) och är både historiskt och didaktiskt riktig. Sjöstrands lärogång är följande: derivatan av x^n och av de trigonometriska funktionerna, bestämd integral, derivatan av en sammansatt funktion, logaritmen, exponentialfunktionen och de cyklometriska funktionerna, obestämd integral jämte formella integralregler, derivatan av produkt och kvot samt av högre ordning, differentialekvationer, kurvkonstruktion etc. Även om jag gillar Sjöstrands grundidé att dra fram integralen, särskilt den bestämda, till ett tidigt skede (jag har själv undervisat så i många år), sätter jag åtskilliga frågetecken för detaljutförandet. Att uppskjuta så enkla deriveringsregler som dem för produkt och kvot till 7:e kap., sedan alla derivator och nästan all integralkalkyl genomgåtts, är en uppenbar överdrift. Eleverna bör

få klart för sig, att det första man gör i matematiken, sedan ett nytt begrepp (limes, komplexa tal, vektorer etc.) skapats, är att använda de 4 enkla räknesätten därpå. Att först i 6:e kapitlet tala om obestämd integral, sedan man så tidigt som i det 2:a utförligt sysselsatt sig med den *bestämda*, är en annan överdrift. Begreppet kontinuitet dyker upp först på sid. 133, sedan, enligt förlagsreklamen, det väsentligaste i boken genomgåtts!

Dylika anmärkningar bör icke rubba intrycket av att en erfaren och skicklig matematiker här har givit de tekniska läroverken en mycket bra lärobok. Den lärobok, som hittills använts, Sigurd Erikssons, har många förtjänster, men just integralkalkylen är dess svaga sida. Sjöstrands lärobok är välgörande fri från slentrian, har goda exempel, av vilka alltid ett är genomräknat för varje nytt område, och mycket välritade figurer. Han skiljer också klarsynt på huvudsak och bisak, vilket kanske bäst framträder i kapitlet om kurvkonstruktion, enligt min mening det bästa i någon svensk lärobok.

Jag beklagar livligt, att författaren inte ansett sig böra taga med den blygsamma kurs i analytisk geometri, som man kan hinna med vid de tekniska läroverken, i sin bok. Nu vet man inte riktigt hur förf. tänkt sig den analytiska geometriens ställning. Han går noggrant igenom vad som menas med koordinater men utgår några sidor senare från att eleverna kan relationen $k_1k_2=-1$ för två mot varandra vinkelräta linjer, o. dyl. Det hela blir litet haltande, och bäst hade det varit med en kombination av funktionslära och analytisk geometri.

Oerfarna lärare bör ha klart för sig, att läroboken är för vidlyftig. Å andra sidan vill man inte gärna ha kapitlen om differentialekvationer, Taylors serie, komplexa tal och nomografi borta eller minskade, det är svårt för eleverna att finna dessa nyttiga ting på lättillgängligt håll.

Vissa saker skulle man nog velat ha annorlunda. Det synes mig t. ex. vara mindre lämpligt att som förf. ofta gör införa viktiga begrepp (gränsvärde, inflexionspunkt) i den finstilta texten till ett genomräknat exempel. Symbolen $f(x)dx$ i integralen får ingen förklaring. Den flitiga användningen av dx, innan differentialbegreppet genomgås, finner jag störande. Men slutintrycket blir dock, att Sjöstrands lärobok är en förtjänstfull prestation. *Einar Lunell*

K. Alfsen, Ths. Skjulstad og K. B. Sollesnes, *Matematikk for språklinjene*. H. Aschehoug & Co., Oslo 1952, 276 s.

Boken inledes med ett kapitel om grafisk framställning, varvid olika diagramformer såsom stapeldiagram, sektordiagram och kurvdiagram behandlas. Kurvdiagrammen svarar i stort sett mot hela rationella funktioner av 1:a och 2:a graden samt mot brutna rationella

funktioner av typen $a/x+b$. De närmast följande kapitlen avhandlar samhällsräkning.

Rätt tidigt införes logaritmerna och detta på ett sätt, som kanske kan vara av visst intresse för svenska förhållanden, t. ex. vid de tekniska realskolorna. Man etablerar en motsvarighet mellan två grupper av tal $a\,(>0)$ och b så, att om till a_1 svarar b_1 och till a_2 svarar b_2, skall till a_1a_2 svara b_1+b_2. Vidare skall till talet 10 i a-gruppen svara talet 1 i b-gruppen. Av dessa definitioner kan man nu beräkna de tal i a-gruppen, som svarar mot talen 0, 0,5, 0,25, 0,75 osv. Man skaffar sig sålunda en tabell över tal mellan 0 och 1 i b-gruppen och motsvarande i a-gruppen och kan sedan framställa tabellen grafiskt. Logaritmlagarna dvs. motsvarande tal till a_1a_2, a_1/a_2, a_1^n och $\sqrt[n]{a_1}$ erhålles sedan enkelt, varefter logaritmbeteckningen $b={}^{10}\log a$ kan införas. Fördelen med metoden är framför allt, att av kapitlet rötter och potenser bara definitionerna av digniteten a_1^n och av $\sqrt[n]{a_1}$ behöver vara kända.

De följande kapitlen i boken upptar ytterligare samhällsräkning, något om aritmetiska och geometriska serier och i samband därmed sammansatt ränta.

Ett av de sista kapitlen i boken och kanske det mest intressanta behandlar exponentialfunktionen, »funktionen for naturlig vekst». Med utgångspunkt från ett exempel, hämtat från biologien, införes a^x och definieras sedan för x negativt heltal, positivt bråk osv. Och i slutet av det nämnda kapitlet tas funktionen $y=10^x$ upp till skärskådande, och det uppvisas, att $x={}^{10}\log y$. *Karl von Proschwitz*

Experimental Nuclear Physics. Volume I and II. Editor: E. Segrè; J. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1953. Vol. I, Pp. 789, $ 15.00; Vol. II, Pp. 600, $ 12.00.

För endast några få år sedan var bristen på lärobokslitteratur inom kärnfysiken synnerligen besvärande. För licentiander och doktorander med huvudinriktning åt detta så aktuella och givande forskningsfält var avsaknaden av lämplig kurslitteratur naturligtvis en svår olägenhet, som onödigtvis förlängde och försvårade studierna. Betydande avsnitt av den tillgängliga lärobokslitteraturen var t. o. m. författade före kriget. De stora luckorna har nu börjat att fyllas ut. Bl. a. kan man nämna Hallidays »Introductory Nuclear Physics» (1950), Fermis »Nuclear Physics» (1950) samt Blatt och Weisskopfs »Theoretical Nuclear Physics» (1952). Nu föreligger också första och andra delen av ett större verk »Experimental Nuclear Physics», som redigeras av den kände italiensk-amerikanske fysikern Emile Segrè, en

av Fermis tidigare medarbetare. Verket är avsett att komma ut i tre delar och torde i sin kompletta form täcka mycket viktiga avsnitt av kärnfysiken, ehuru man av verkets uppläggning ser att någon fullständighet härvidlag icke eftersträvats.

Den första delen behandlar detektionsmetoder (förf.: H. Staub), strålnings passage genom materia (H. Bethe, J. Ashkin), kärnors moment och statistik (N. Ramsey) samt jonoptik och masspektroskopi (K. Bainbridge). Samtliga avsnitt är ytterst omsorgsfullt utarbetade och för det auktoritativa innehållet borgar de välkända författarnamnen. Vissa avsnitt har fått en mycket pedagogisk och stimulerande uppläggning. Detta gäller i hög grad Ramseys båda bidrag. Men även övriga avsnitt står icke långt efter i detta avseende. Andra delen består av två mycket omfattande avsnitt, nämligen kärnreaktioner (P. Morrison) och neutronen (B. Feld). Båda författarna är erkänt goda pedagoger och forskare. Framställningen är också föredömligt klar och givetvis helt modern. Det är följaktligen ett nöje att rekommendera de två nu föreliggande volymerna av detta verk för högre studier. När hela verket om något år föreligger färdigt, torde av allt att döma lärobokssituationen inom kärnfysiken komma i ett avsevärt bättre läge än tidigare. *Kai Siegbahn*

Y. Rocard, *Thermodynamique*. Masson et Cie, Paris 1952, 551 p., 4150 fr.

Med termodynamik brukar man mena den matematiska teori som grundar sig på de båda (eller tre) huvudsatserna. I professor Rocards bok behandlas emellertid dessutom även gaskinetiken och den statistiska mekaniken. Med vårt språkbruk skulle vi väl hellre kalla verket en lärobok i värmelära.

Den egentliga termodynamiken jämte tillämpningar upptar ungefär halva boken. Denna del av fysiken har sin uppenbara betydelse för kemien och såsom en bakgrund till de statistiska teorierna för värmet. Den torde dock ofta av våra dagars fysiker bemötas med den vördnadsfulla men kyliga aktning som tillkommer ett klassiskt konstverk. Atomfysiken har sedan Ostwalds och Arrhenius' dagar tystat diskussionen om världens entropiinnehåll och värmedöden. Att nya skott ännu kunna växa på det gamla trädet visar dock den av Onsager utvecklade termodynamiken för irreversibla processer, liksom den moderna cybernetiken på ett mycket fruktbärande sätt utnyttjat termodynamikens tankegångar och uttryckssätt på ett helt annat område. En termodynamik, som omfattar även kärnreaktioner, leder för övrigt till en situation, som principiellt icke skiljer sig mycket från den i seklets början: vi ha nu en »energetik», som ej störes av några mystiska radioaktiva processer, utan alla kända företeelser gå att

inordna i systemet. Mellantidens bestående framsteg är att vi numera ha den klassiska termodynamikens begränsning fullt klar för oss: dess lagar äro gränsfall, blott asymptotiskt uppnåeliga.

Om denna bok genom sin grundliga behandling av den klassiska termodynamiken leder tanken till motsvarande äldre verk t. ex. Plancks, så är den i andra avseenden synnerligen modern. Sålunda äro de ovan berörda frågorna alla belysta i Rocards bok. Efter de klassiska strålningslagarna behandlas kärnreaktioners termodynamik med tillämpning på astrofysik och kosmologi. Ett kapitel om teknisk termodynamik omfattar bl. a. kärnreaktorer, explosivämnen och låga temperaturer. Flytande helium behandlas både ur termodynamiska och kvantstatistiska synpunkter. Avslutningsvis beröres den omnämnda teorien för irreversibla processer.

Ett sådant omfattande stoff har icke kunnat komprimeras inom en volym utan särskilda konstgrepp. Det viktigaste av dessa är att all propevdetik bannlysts. Vår 2-betygskurs för fil. ämbetsexamen kan anges såsom nödig förkunskap. Vidare synes författaren ingenstädes ha tillåtit sig en fördjupning utöver vad som fordras för ett grundligt inhämtande av elementa. Någon lätt lektyr blir boken under sådana omständigheter knappast. Man kan ifrågasätta om ej en koncentration omkring väsentligheterna, med utelämnande av en del i sig själva intressanta tillämpningar, gjort boken mera lättöverskådlig och lättläst. Emellertid får boken genom denna komposition i viss mån handbokskaraktär: man kan hitta snart sagt allt om ämnet i den. Denna karaktär skulle vara än mera utpräglad, om det funnits fullständiga källangivelser till omnämnda moderna originalarbeten, vilka ofta äro för icke-specialisten obekanta.

Typografien och illustrationerna äro tillfredsställande. Valda delar av boken skulle måhända kunna användas såsom delspecimen för licentiatexamen, varvid de icke obligatoriska partierna bleve en värdefull tillgång för fördjupade studier. Språket är klart, enkelt och livligt, varför läsningen ej bör vålla en svensk läsare några svårigheter.

Lennart Huldt

H. Rouse, J. W. Howe, *Basic Mechanics of Fluids*. J. Wiley and Sons, New York, Chapman and Hall, London 1953, Pp. 245, $ 4.50.

Författarna, som äro professorer vid universitetet i Iowa, vill med denna bok ge en mycket elementär framställning av hydromekanikens grunder. Man har i stort sett vid disposition och uppläggning av ämnet följt den av prof. Rouse skrivna boken »Elementary mechanics of fluids» (Wiley, 1946). Det är en modern bok, som rekommenderas var och en, som har intresse för ämnet men ej vill sätta sig in i den ganska vidlyftiga matematiska apparatur, som är nödvändig vid

ett fördjupat studium. Tillräckliga förkunskaper är realstudentkursen i matematik och fysik.

Inledningsvis behandlas dimensionsbetraktelser ganska ingående, och efter en framställning av hydromekanikens fundamentala principer behandlas viskösa vätskor, turbulens och gränsskikt. Texten är rikligt illustrerad och exemplifierad och man har medtagit och diskuterat en hel del resultat, som f. n. endast äro funna på experimentell väg, t. ex. tryckfall i rör vid turbulens samt formler för beräkning av gränsskikt. I de sista kapitlen behandlas vingteori, turbiner och pumpar samt kompressibilitetens betydelse (»Machs tal»). Läsaren får tillfälle att tänka över denna elementära men mycket givande bok genom att lösa 400 problem. *Bengt Andersson*

Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics.* John Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1953, Pp. XII+396, $ 7.00.

I förordet till boken nämner författaren (som är professor vid universitetet i Berkeley), att det under senaste tid snabbt växande intresset för fasta tillståndets fysik plötsligt ställt universiteten inför problemet att ge lämpliga kurser i denna vetenskapsgren. Bokens innehåll: klassifikation av fasta kroppar och kristallstrukturer, gitterenergi hos jonkristaller, kristallers elastiska konstanter, gittersvängningar, termiska egenskaper, dielektrika och ferroelektrika, dia-, para-, ferro- och antiferro-magnetism (även något om atomkärnors magnetism), supraledning, fri elektron- och bandteori för metaller, halvledare (innefattande bl. a. teorin för transistorer eller kristalltrioder), ofullkomligheter i fasta tillståndet (gitterfel), problem. I ett flertal tabeller ges talvärden på till området hörande fysikaliska storheter.

Efter genomläsning av boken är man beredd till starka lovord över klarheten och exaktheten i framställningen. Detta gäller inte minst de rätt talrikt förekommande matematiska härledningarna, som till en del ingår i de olika kapitlen, till en del sammanförts i ett appendix. *J. O. Linde*

Gotthard Gronau, *Physikalisches Experimentierbuch.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig-Berlin-Stuttgart, 1952, 204 S., kr. 20:—.

Antalet goda handledningar för fysikaliska lektionsförsök är ganska begränsat. En fysikinstitution vid ett svenskt läroverk kunde för t. ex. 20 år sedan förses med en rad lämpliga arbeten av sådan art. Ehuru utgångna i bokhandeln förtjäna följande kanske att nämnas: M. Lemoine, Experimentell fysikundervisning, Uppsala 1923 (förträffliga *råd* i all synnerhet); Weinhold, Physikalische Demonstrationen, 6:e uppl., Leipzig 1921 (ett överväldigande rikt innehåll, särskilt för händiga lärare); Rosenberg, Experimentierbuch für den Unterricht in der

Naturlehre, 2 delar, Leipzig 1929 (mera allmän karaktär); Roller-Pricks, Schulversuche mit Gleichstrom (I), mit Wechselstrom (II), Phywe, Göttingen, 1933 (relativt få försök, värdefull text).

Så ett par nyare: Sutton, Demonstration Experiments in Physics, McGraw-Hill, New York 1938, ung. 20 kr. (många, enklare såväl som svårare, försök); Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, 2 band, W. de Gruyter & Co., Berlin, ung. 20 kr. per band; E. Roller, Experimentelle Naturlehre, Hippolyt-Verlag, S:t Pötten-Wien.

För ett år sedan kom det senaste arbetet på tyska, Gronaus. Med mer än 300 försök på alla områden av skolfysiken visar förf., gammal och erfaren lärare, att han har mycket att lära ut. För realskolans fysikundervisning är Gronau icke särskilt lämpad — här vänta de svenska läroverken ännu på »en ny Lemoine» (mannen och boken!) — men för gymnasiet är den utmärkt. Försöksbeskrivningarna äro ofta försedda med enkla och bra figurer och upptaga även sifferuppgifter på avstånd, spänningar, resistanser, kapacitanser etc. Ganska många har rec. prövat och funnit förträffliga. Försöken bygga i regel blott på vad som finnes på en nutida, välskött fysikinstitution.

Gronaus bok har mycket att bjuda den intresserade fysikläraren. Den är synnerligen stimulerande. *Einar Wetterwik*

Gunnar Almkvist och Ernst Knave, *Laborationer*, Del III. Svenska Bokförlaget (Bonniers), Stockholm 1953, 21 s., kr. 1:80.

De tidigare delarna av detta arbete, som anmälts i Elementa 35:1 och 35:4, har nu följts av en tredje del, avsedd för klass 4^5 och 3^1 och enhetsskolan. Liksom tidigare delar är häftet hålslaget och kan insättas i en pärm tillsammans med redogörelser, som eleverna eventuellt får skriva helt på egen hand.

Man återfinner här många bekanta försök, men även en del laborationer, som inte torde vara så vanliga: Några försök med magneter, Försök med elektroskop, Mätning av elektrisk spänning och strömstyrka, Galvaniska element, Elektriskt batteri, Blyackumulatorn, Magnetfältet kring en elektrisk ström, Elektriskt motstånd, Ersättningsmetoden, Volt-ampèremetoden, Elektrisk värmeutveckling, Motståndet och effekten hos en glödlampa, En ledares rörelse i ett magnetfält, Induktion, Växelströmmar, Transformatorn, Ljusets reflexion, Ljusets brytning, Brännvidden hos en konvex lins, Försök med konvex lins och bländare, Kikare.

Antalet försök kan synas stort. Det är knappast möjligt att medhinna alla såsom laborationer, vilket säkert inte heller varit författarnas mening. Nu har ju inte alla skolor samma utrustning, varför man måste ha flera försök att välja mellan. En del försök kan också med

fördel utföras av läraren under en lektionstimme, varvid varje elev inför resultaten i sitt häfte, som härigenom faktiskt kommer att bli en sammanhängande liten lärobok.

Några spridda reflexioner: Man noterar med tillfredsställelse, att den gamla förfalskade bilden av en magnet, där magnetismen har sitt säte i två »poler», har försvunnit. — Försöket att göra en glasstav elektrisk genom gnidning utföres här mycket elegant. Man använder nämligen en gummiduk (men det måste vara bra gummi, svarta sorter är ofta ej tillräckligt goda isolatorer!) och kan då påvisa båda laddningarna, den ena på staven och den andra på duken, något som sällan lyckas med kattskinn och tygtrasor. — På försöket med en glödlampas motstånd skulle man önska, att författarna tillfogade ännu en rad i resultattabellen, avsedd för en mycket låg spänning; det kan ju vara roligt att få reda på, att en glödlampas motstånd i kallt tilllstånd är mindre än tiondelen av motståndet vid driftspänningen. — Ett försök får man nog varna för, nämligen försöket med lins och bländare. Med de koncentriska ringar, som användes som föremål, råkar man nämligen lätt ut för en obehaglig överraskning. Ringarna avbildas på en mattskiva. Skjuter man skivan försiktigt bort ur bildplanet, blir bilden visserligen suddigare, men snart har man ånyo en ganska skarp bild, men en bild där svart och vitt har bytt plats! Det är bättre att använda lampans glödtråd som föremål och se efter, när man kan se en tydlig breddning. Dessutom lyckas försöket endast med linser, som vid den största använda bländaren har obetydlig sfärisk avvikning, dvs. brännvidden måste vara rätt stor. Randstrålarna med stor avvikning ger nämligen upphov till en diffus ljusfläck kring den skarpa bild, som centralare strålar ger. En minskning av bländaren försvagar till en början endast denna ljusfläck men orsakar ingen ändring i skärpedjupet.

En enda laboration, som utfallit mindre väl, kan dock inte förta det mycket goda intryck man får av häftet. *Bengt Liljeqvist*

Edmund O. v. Lippmann, *Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik*, Band II, Verlag Chemie, Weinheim 1953, 357 S., DM 21,80.

Den framstående tyske sockerkemisten och -teknikern Edmund O. v. Lippmann (1857—1940) har rest sig ett bestående minnesmärke i det 1919 utkomna, utomordentligt intressanta verket »Entstehung und Verbreitung der Alchemie». Hans intresse för kemiens historia varade livet ut och tog sig bl. a. uttryck i en mängd uppsatser i olika tidskrifter. Ett stort antal av dessa har nu samlats och utgivits i ett band med ovanstående titel (Band I utkom 1923). Det nu utgivna arbetet skulle kunna karakteriseras som en samling »småberättelser», vilkas

motiv huvudsakligen är hämtade dels ur alkemiens och den tidigare kemiens, dels ur sockerindustriens historia.

Liksom i de flesta dylika samlingsverk finner läsaren även här mycket av intresse och en del mera likgiltigt. Var och en, som får tag i boken, måste emellertid imponeras av v. Lippmanns oerhörda beläsenhet och av hans förmåga att på ett medryckande sätt berätta om sina fynd. På många ställen finner man sådant, som ger en mycket god inblick ej blott i längesedan gångna tiders kemi utan även i deras kultur överhuvudtaget. Dråplig, ej minst för läsare i våra dagar och i vårt land, är skildringen av dryckessederna i Indien omkring år 300 f. Kr. Vinet och ölet — destillerade drycker var ju vid denna tid helt okända — såldes i statliga värdshus och konsumerades i stora kvantiteter ej blott av män utan även av kvinnor och barn. En särskild minister hade överinseendet över dryckernas framställning och försäljning, liksom han också skulle ta upp den skatt, som fabrikanter och försäljare av dem hade att erlägga. Han skulle också i möjligaste mån »jämna ut de motsatser, som dessa drycker ovillkorligen framkallar». Å ena sidan orsakar de »mycken förskräcklig olycka och svåra skador på folkhälsan», men är å den andra »av finansiella skäl alldeles oumbärliga för staten». — Ja, detta var, som sagt, år 300 f. Kr.!

I flera fall ger v. Lippmann med ledning av i längesedan gångna tider utgivna verk intressanta översikter över de kemikalier och apparater, som då var kända. Lärorikt är att se, vilka underliga teorier som på sin tid gällt för vetenskapens högsta ord. Ända fram på Lavoisiers tid ansåg man sålunda att många sjukdomar hade sin orsak i att blodets runda och glatta smådelar hindrades i sitt omlopp av syrornas trekantiga och slemämnenas taggiga smådelar. I en uppsats om Lucretius (1:a århundradet f. Kr.) återges en del fysikaliska teorier från denna tid, t. ex. förklaringen av blixten »som består av ytterligt små eld-atomer, vilka, därför att de äro så oerhört små, ha de allra mäktigaste verkningar och av stormens ofantliga tryck våldsamt stötes ut ur de med eld fyllda molnen». Inför sådana teorier undrar man, vad vetenskapsmännen tusen år härefter skall tänka om det, vilket just nu gäller som erkänt riktigt.

Av de uppsatser, som behandlar sockerframställningens historia, är särskilt de av intresse, vilka talar om de tidigaste försöken att utvinna socker ur betor. Att detta kunde ske, hade ju redan Margraff visat vid 1700-talets mitt, men det tycks att börja med endast ha haft kuriositetsintresse. Stöten till ett ivrigt experimenterande på området gavs av Napoleons kontinentalspärr, som gjorde rörsockret så gott som oåtkomligt. Lippmanns framställning visar, hur utvinningen av socker ur betor under dessa förhållanden bedrevs som rent hushållsarbete eller i vissa fall som ett slags hemindustri. När kontinentalspärren hävdes,

lönade sig dessa försök ej längre. Framställningen av betsocker i större skala var en något senare tid förbehållen.

Bokens uppsatser avhandlar ej enbart kemi och fysik utan även åtskilliga naturvetenskapliga frågor av vidare omfattning. Sålunda ägnas på ett ställe många sidor åt gångna tiders tankar om livets första uppkomst på jorden — som bekant en av du Bois-Reymonds 1880 framställda och omkring sekelskiftet så ivrigt diskuterade »världsgåtor». Sedan man läst denna resumé, instämmer man gärna med några i boken citerade ord av en viss Adelhard från Bath (omkr. 1100): »Det är vida lättare att upptäcka fel än att tränga fram till sanningen».

John Lundberg

Traité de chimie organique. Publié sous la direction de Victor Grignard, G. Dupont et R. Locquin. Tomes XX et XXII. Masson et Cie, Paris 1953. Tome XX: 1404 p.; 11 330 fr. Tome XXII: 1290 p.; 10 560 fr.

Få svenska kemister torde känna till existensen av detta jättelika franska uppslagsverk, som planerats av V. Grignard och som började utgivas på 30-talet. Av de båda här refererade banden är band XXII det näst sista i hela verket. Band XXIII kommer endast att innehålla register.

Band XX är liksom 18 av de övriga banden av systematisk natur. Det omfattar vissa heterocykliska föreningar, nämligen sexringar och större ringar med en N-atom, samt en del heterocykler med två heteroatomer (N, O eller S). Bandet är uppdelat i flera kapitel, skrivna av olika förf. Mot de första kapitlen (pyridin- och piperidinderivat) måste man rikta den anmärkningen, att de endast omfatta litteraturen t. o. m. år 1941. De övriga kapitlen äro mera aktuella. Mängden av fakta är överväldigande stor och litteraturförteckningarna rikhaltiga. Någon förminskad Beilstein är dock inte Grignards handbok. Den har betydligt mer »kött på benen» i form av text, t. ex. diskussion av reaktionstyper gemensamma för en viss substansklass o. d.

Band XXII behandlar i 10 kapitel den organiska kemins industriella tillämpningar. Även här finns ett ganska föråldrat kapitel, nämligen det som behandlar garvning och garvämnen, avslutat 1943. Det kanske intressantaste avsnittet handlar om kemoterapi och antibiotika ända fram till de senaste årens »undermediciner». *Gösta Lindstedt*

G. Jander und K. F. Jahr, *Massanalyse I und II.* Sammlung Göschen Band 221 und 1002, W. de Gruyter, Berlin 1952, 140+139 S., DM 2.40+2.40.

Den välkända boken har utkommit i en ny upplaga, som i huvudsak är ett nytryck av den, som utkom 1935.

Bokens innehåll är uppdelat på två avsnitt. I del I beskrives först materiel och arbetsteknik, som kommer till användning vid volumetriska analysmetoder. Därefter ge författarna en översikt över klassiska red-ox-titreringar, behandla kortfattat teorin för syra-bas-titreringar samt diskutera de vid sistnämnda titreringar oftast nyttjade färgindikatorerna. Olika exempel på syra-bas-titreringar beskrivas i del II. Där behandlas också teori och metodik för fällningstitreringar, konduktometriska och potentiometriska titreringar. Som avslutning ges en kort historik över den volumetriska analysens historia.

De båda betydelsefulla volumetriska analysmetoderna amperometriska titreringar och användandet av ionbytande ämnen ha ej behandlats. Boken ger för övrigt de viktigaste arbetsmetoderna inom området på ett kortfattat och klart framställt sätt. De teoretiska härledningarna och nomenklaturen äro ej alltid helt moderna. *Karin Aurivillius*

Rudolf Börner, *Welcher Stein ist das?* Kosmos Naturführer, Franckhs Verlagshandlung, Stuttgart 1953, 167 S., kr. 11:50.

I den nya stadgan för universitetsexamina föreskrives en kurs i mineralogi för dem, som ha kemi i ämbetsexamen. Därmed kommer en känd lucka att fyllas i utbildningen av kemilärarna, som väl hittills i allmänhet klarat »stenarna» tack vare etiketterna på skolans samling. Här skall jag fästa uppmärksamheten på en förträfflig hjälpreda för den som vill finna sig tillrätta i stenriket utan att vara fackman.

Börners bok innehåller först och främst en tabell över 200 mineral, ordnade efter färg med uppgift om hårdhet, streck, kristallform m. m., och därjämte tabeller över ädelstenar och bergarter. Några korta systematiska sammanfattningar, välredigerade register och många särdeles vackra färgbilder ge arbetet ökat värde och intresse. Med god framgång har jag prövat bokens användbarhet på den samling av ett tjugotal mineral, som jag har brukat använda för laborationsövningar i klass 4^5. En liten svårighet visar sig ligga däri, att *färgen* är den genomgående indelningsgrunden — många mineral ha ju växlande färger, och det är litet förbryllande att t. ex. finna zinkblände under rubriken *gul*, men med ledning av streck och hårdhet går det att bestämma också zinkblände, som är svart. *Bertil Englund*

Böös—Lundberg—Leden, *Lärobok i kemi för gymnasiet.* 8:de uppl., Svenska Bokförlaget (Norstedts), Stockholm 1953, 314 s., kr. 8:75.

Böös-Lundbergs välkända och uppskattade lärobok har under medverkan av Ido Leden underkastats en välbehövlig och skickligt gjord översyn. Den viktigaste förändringen är, att moderna synpunkter på

den kemiska bindningen redan från början införts. Man undrar dock, om inte härvidlag en ansats till det periodiska systemet borde ha lagts till grund för valensläran.

Genom hela boken har detaljer omarbetats och dessutom flera åskådningar genomarbetats till fastare konsekvens. En del mindre väsentligt stoff, mestadels rörande tekniska tillämpningar, har uteslutits, och bokens omfång har t. o. m. minskats något. Den pedagogiska grundtonen är på ett välgörande sätt bibehållen. *Einar Grimsell*

Bertil Englund, *Kemi som hobby.* Forum, Stockholm 1953, 270 s., häft. kr. 12:75, i band som tål fett och vatten 15:75.

Boken, som ingår i När-Var-Hur-serien, beskriver en mängd väl valda och instruktiva försök på sådant sätt, att kemiintresserade ungdomar på egen hand kan utföra dem. Försöken ligger huvudsakligen inom ramen för realskolans kurs, men även några mera krävande experiment är medtagna.

Kemi som hobby är en utomordentlig presentbok för experimentlystna unga kemister och kan varmt rekommenderas för användning vid frivilligt övertidsarbete på laboratoriet. *Einar Grimsell*

Willstaedt—Virgin—Myrbäck, *Kemi med biokemi.* Andra omarb. uppl. Svenska Bokförlaget (Bonniers), Stockholm 1953, inb. kr. 29:50.

Man behöver inte precis leta efter tecken på biokemins stora och ständigt växande betydelse i vår tid. Även det faktum att Willstaedt—Virgins lärobok utkommit i en andra och betydligt utvidgad upplaga kan tagas som ett sådant tecken. Boken omfattar nu 460 sidor mot 322 i första upplagan. Även formatet är något större.

I denna andra upplaga har professor Karl Myrbäck inträtt som författare i stället för docenten Harry Willstaedt, som avlidit. Bokens disposition är i sina huvuddrag oförändrad, men innehållet är på många punkter grundligt omarbetat. Detta gäller särskilt biokemin, som till stor del nyskrivits. Även den inledande allmänna kemin är betydligt utvidgad och omarbetad. Syror och baser definieras nu enligt Brönsted. Periodiska systemet, atomernas byggnad, kemisk bindning och därmed sammanhängande frågor har fått en avsevärt fylligare behandling. Även den organiska delen har både utvidgats och i många detaljer moderniserats, bl. a. i fråga om nomenklaturen. I överensstämmelse med språkbruket i anglosaxisk litteratur användes nu uttrycket hydroxiföreningar i stället för oxiföreningar och karboxylsyror i stället för karbonsyror.

Det biokemiska avsnittet är bokens största. Där behandlas liksom förut äggviteämnen, enzymer, vitaminer och hormoner. De metaboliska processerna, som i första upplagan fanns instoppade i kapitlet

om enzymer, bildar nu ett särskilt kapitel. Å andra sidan har kapitlet om klorofyll m. fl. naturfärgämnen uppdelats. Dessa ämnen återfinner man i stället i de kapitel, dit de av kemiska eller biologiska skäl hör.

De omdömen, som av G. Starck fälldes i Elementa (1942) om första upplagan, gäller fortfarande och i förstärkt grad. Arbetet är tämligen unikt i svensk lärobokslitteratur, och särskilt tacksam är man för den vederhäftiga presentationen av biologiskt viktiga ämnen och av livsprocessernas kemiska aspekter. Härigenom blir boken av speciellt värde för biologistuderande av olika slag och för de biologilärare, som antingen inte har kemi med i sin examen eller vars utbildning ligger långt tillbaka i tiden. Den kan också anbefallas till de läroverkselever, som vill ha en måttlig överkurs i organisk kemi eller en grundligare överkurs i biokemi. Men också kemiläraren finner mycket av intresse i den, t. ex. några på skolstadiet användbara biokemiska experiment.

Åke Uddling

Harry G. Romig, *50—100 Binomial Tables.* Wiley & Sons, New York 1953, Pp. 27+172, 4 $.

I boken tabuleras binomialfördelningen $(p+q)^n$ för $n=50, 55 \ldots 100$ och $p=0{,}01, 0{,}02 \ldots 0{,}50$. Inledningsvis ges anvisningar för interpolation och exempel på användningsmöjligheter.

Tabellen utgör ett värdefullt komplement till den av National Bureau of Standards utgivna tabellen, som täcker området $n=1$—49.

Gunnar Blom

Författare i detta häfte: docent B. Andersson, Stockholm; docent K.-B. Augustinsson, Stockholm; assistent Karin Aurivillius, Stockholm; fil. lic. G. Blom, Malmö; lärov.adj. P. Carlsson, Djursholm; lektor B. Englund, Uppsala; docent T. Ganelius, Lund; lärov.adj. E. Grimsell, Norrköping; docent O. Hanner, Stockholm; fil. dr H. Hellström, Spånga; lektor S. Hilding, Stockholm; docent L. Huldt, Stockholm; docent E. Ingelstam, Stockholm; docent R. Kiessling, Söderfors; byrådirektör G. Kjellberg, Stockholm; konsul D. F. Larsson, Stockholm; fil. lic. Chr. Lech, Stockholm; assistent B. Liljeqvist, Stockholm; laborator J. O. Linde, Stockholm; laborator G. Lindstedt, Stockholm; lärov.adj. J. Lundberg, Göteborg; rektor E. Lunell, Skellefteå; lärov.-adj. H. Magnusson, Lund; fil. dr M. Matell, Uppsala; lärov.adj. K. v. Proschwitz, Stockholm; docent H. Rådström, Stockholm; professor K. Siegbahn, Stockholm; lektor G. Starck, Stockholm; fil. dr B. Stolt, Uppsala; lärov.adj. Å. Uddling, Kristianstad; lektor E. Walles, Falun; docent B. Westerlund, Uppsala; lärov.adj. E. Wetterwik, Stockholm; civilingenjör T. Wilner, Stockholm.

Walter Ekman och Carl-Olof Sandström, *Lärobok i organisk kemi* för latingymnasiet och allmänna linjens första ringar. Svenska Bokförlaget (Bonniers), Stockholm 1953, 40 s., kr. 1:80.

En föredömligt kortfattad men dock tillräckligt innehållsrik kurs i elementär organisk kemi med tekniska tillämpningar meddelas i korrekt form. Det kunde nog ha varit till fördel, om de fåtaliga illustrationerna (2 st. skisser) något utökats. *Einar Grimsell*

Gradualavhandlingar[1]

Bengt Stolt, *Über Axiomensysteme, die eine abstrakte Gruppe bestimmen.* Uppsala 1953, 99 s. Disp. i Uppsala den 25 april 1952. Opponenter: professor Harald Bergström, Göteborg, fil. lic. Lars Fjellstedt, Uppsala, och doc. Lennart Carleson, Uppsala (extra ordinem).

En abstrakt grupp definieras i regel som en mängd, där följande fyra postulat är uppfyllda:

1) I mängden gäller en entydig kompositionsregel, med vars hjälp man av ett första element a och ett andra element b entydigt kan härleda ett tredje element c i mängden enligt formeln $ab=c$.

2) För tre godtyckliga element a, b och c gäller associativa lagen, dvs. $(ab)c=a(bc)$.

3) Om a och c är två element, finnes det exakt ett element b sådant, att $ab=c$.

4) Om b och c är två element, finnes det exakt ett element a sådant att $ab=c$.

3) och 4) kan här ersättas av 3′) och 4′):

3′) I mängden finnes ett enhetselement e sådant att för ett godtyckligt element a gäller $ea=ae=a$.

4′) Till varje element a finnes exakt ett inverst element a^{-1} sådant, att $a^{-1}a=aa^{-1}=e$. (Se ex. Nagell, Lärobok i algebra, Uppsala 1949.) De båda systemen 1), 2), 3), 4) och 1), 2), 3′) och 4′) kallas de klassiska definitionerna för en grupp.

Några av postulaten i de klassiska definitionerna innehåller emellertid förutsättningar, som antingen ingår i mer än ett postulat eller också kan härledas ur de andra postulaten. Exempelvis behöver man inte i 3) och 4) förutsätta, att b resp. a är entydigt bestämda, ty

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

entydigheten kan härledas ur 1) och 2) samt 3) och 4) formulerade på ett sådant sätt, att entydighet icke förutsättes.

Det är nu gruppaxiomatikens uppgift att sönderlägga de postulat, som ingår i de klassiska definitionerna, i mindre omfattande förutsättningar eller gruppaxiom och av dessa uppbygga s. k. fullständiga axiomsystem, vilka i likhet med de klassiska definitionerna kan användas för att definiera en abstrakt grupp men som till skillnad från dessa endast innehåller absolut nödvändiga gruppvillkor. Några axiomatiska undersökningar publicerades under 1900-talets första år av bl. a. Dickson och Huntington. En systematisk undersökning av de axiom som erhålles ur 3) och 4) företogs 1932 av Baer och Levi, som uppställer samtliga fullständiga system, som erhålles ur den av dem behandlade axiommängden. De behandlar både ändliga och oändliga grupper; senare författare har inte behandlat ändliga grupper.

I ett arbete från 1942 uppställer Lorenzen nya axiom — han opererar med sammanlagt 17 stycken — och behandlar problemet att bilda de fullständiga system, som innehåller högst fyra axiom. Han visar, att det endast finnes sex sådana system, och genom att betrakta formuleringar av associativa lagen, i föreliggande arbete betecknade med *UA* och EA_L, som innehåller vissa unitets- och existensvillkor, kan han även uppställa sju system i vilka antalet axiom reducerats till tre.

I föreliggande avhandling utökas Lorenzens axiommängd med ytterligare nio axiom. Härigenom blir det möjligt att i tre av Lorenzens sex system ersätta de ingående axiomen med svagare. Inalles uppställes 39 fullständiga system, och vidare härledes ett antal icke fullständiga system. Slutligen återstår 8 system, som förf. lämnar som oavgjorda fall. Vidare uppställes samtliga fullständiga system, 12 stycken, som kan bildas ur Lorenzens axiommängd.

I avhandlingens senare del behandlas fullständiga system, som innehåller associativa lagens av Lorenzen använda formuleringar *UA* och EA_L, den av Huntington använda formuleringen EA_H samt en av förf. uppställd formulering EA_{St}. Av dessa bildas sammanlagt 71 fullständiga system, varvid dock är att märka, att vissa av dessa system lätt erhålles ur varandra. Förf. visar även, att överallt där det förekommer man kan ersätta Huntingtons axiom med förf:s eget.

I avhandlingen anges även en metod att bestämma, om ett fullständigt axiomsystem är irreduktibelt eller ej. Av de i avhandlingens förra del uppställda systemen är 20 irreduktibla; irreduktibiliteten hos systemen i avhandlingens senare del kan lätt återföras på systemen i den förra delen. Den detaljerade tillämpningen av metoden på samtliga fall har utelämnats av utrymmesskäl, då förf:s undersökningar på denna punkt är lätta att kontrollera.

Vid disputationen visade docent Carleson, att ett av de oavgjorda systemen i själva verket är fullständigt. Sedermera har förf. ur de oavgjorda systemen kunnat härleda tre fullständiga och ett ofullständigt system. (Stolt, Weitere Untersuchungen zur Gruppenaxiomatik, publ. i Arkiv för matematik.) F. n. återstår fem oavgjorda system, men att avgöra deras karaktär kräver mera möda och arbete än problemet kan anses värt.

Bengt Westerlund, *Luminosity Effects and Colour-Equivalents as Measured in Short Stellar Spectra*, Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar, Fjärde Serien, Band 2, N:o 4, 1951; Band 3, N:o 5, 1953; Band 4, N:o 6, 1953 (Uppsala Observatoriums Annaler, Band 3, N:o 6, 8 och 10). Disputation i Uppsala den 17 oktober 1953. Opponenter: observator Carl Schalén och lektor Olof Eklöf.

Materialet för avhandlingen har insamlats med Uppsala Observatoriums 15 cm dubbelastrograf försedd med objektivprisma och gitter. Korta stjärnspektra (dispersionen ca 280 Å vid $H\gamma$) ha sålunda erhållits dels av ett område i Cepheus, tidigare undersökt av observator Schalén, dels av ett hundratal apparent ljusstarka stjärnor klassificerade i Mt. Wilson och dels av området kring den öppna stjärnhopen i Coma Berenices. Samtliga spektra ha breddats, varigenom mätnoggrannheten ökas. För uppmätningen ha alla spektra registrerats med observatoriets självregistrerande mikrofotometer, varvid stor förstoring och smal spalt använts.

Avhandlingens första del omfattar en undersökning av luminositetseffekterna i stjärnor av spektraltyperna B, A och F. Vätelinjernas totalintensiteter ha mätts med planimeter. Sambandet mellan den totala och den centrala linjeabsorptionen och stjärnornas absoluta ljusstyrkor har undersökts liksom också sambandet mellan den av vätelinjernas vingar orsakade nedtryckningen vid 3780 Å och absoluta magnituderna. Den senare effekten visade sig lämplig för avskiljandet av absolut mycket ljusstarka stjärnor och stjärnor med pekuliära spektra. — Ett försök att mäta den kontinuerliga väteabsorptionen (Balmersprånget) göres också.

Stjärnornas färger ha i denna liksom i de följande delarna undersökts med ett antal färgekvivalenter, av vilka den längsta (4400—3780 Å) visat sig vara ett mått på stjärnornas absoluta ljusstyrkor. Av jämförelsen mellan de olika ekvivalenterna framgår vidare, att den observerade färgökningen hos ekvivalenten 4400—3910 Å för avtagande absolut ljusstyrka inom spektralklassen A0 till största delen beror på den samtidigt ökande absorptionen i vätelinjernas vingar.

Avhandlingens andra del omfattar en undersökning av färg- och

luminositetseffekter i stjärnor av spektraltyperna F, G och K. Med utgångspunkt i fyra färgekvivalenter undersökes den kontinuerliga bakgrunden i spektra. Relativa gradienter bildas med dvärgstjärnor av spektraltypen G0 som standard. Samtliga spektrala effekter hänföras till den så definierade bakgrunden.

För luminositets- och spektralklassifikationen studeras först de av prof. Lindblad införda s. k. *c*- och *g*-effekterna, av vilka den första ger besked om stjärnan tillhör jätte- eller dvärggruppen, den senare därefter bestämmer spektraltypen. Ett försök att från *c*-effekten eliminera stjärnfärgens inverkan göres. Den kvarvarande »rena» cyanabsorptionens (vid 4180 Å) relation till absoluta magnituderna undersökes. I samband med diskussionen av *g*-effekten visas, att den interstellära absorptionens inverkan på såväl *g* som *c* kan påverka klassifikationen.

Cyanabsorptionen studeras också genom mätning av nedtryckningen vid 3855 Å, den punkt i (0, 0)-bandet, som synes minst störd av metalllinjer i korta stjärnspektra. De båda cyanbandens observerade och beräknade intensiteter vid olika temperaturer jämföras.

Ett försök göres att klassificera stjärnor av spektraltyp G0 och senare med hjälp av CH- och CN-banden. Då den mätta CH-absorptionen visade sig variera inom mycket snäva gränser, utökades materialet med mätningar i större dispersion utförda av Plassard, Setterberg och Tcheng-Kien.

För spektralklassifikationen av F-stjärnorna och dvärgstjärnorna av klass G prövas kvantiteten (Hγ—G), dvs. skillnaden i absorption mellan vätelinjen Hγ och G-bandet. I jättestjärnorna av klasserna G och K användes förutom *g*-effekten också styrkan av CaI-linjen vid 4227 Å och intensitetsfallet från 4030 Å till 3910 Å.

Såsom luminositetseffekter prövas bland annat K-linjen av CaII (vid 3933 Å) och skillnaden i absorption mellan områdena 3800—3820 Å och 3830—3840 Å. Den senare effekten infördes ursprungligen av Nassau och Albada, som visuellt skattade den.

De erhållna kriterierna prövas i slutet av andra delen på stjärnor av sena spektraltyper i Cepheus. I samband härmed diskuteras klassifikationen av F-stjärnorna ytterligare.

I avhandlingens tredje del ges först en sammanställning av de utbildade klassifikationskriteria. Härefter tillämpas schemat på stjärnorna i och omkring den öppna stjärnhopen i Coma Berenices. Med ledning av hopstjärnorna diskuteras F-stjärnornas absoluta magnituder.

För samtliga stjärnor inom de studerade områdena i Cepheus och Coma Berenices ges också monokromatiska magnituder bestämda vid 4400 Å.

Tord Ganelius, *Sequences of analytic functions and their zeros.* Arkiv för matematik, band 3 nr 1, 1953, 50 s. Disputation i Stockholm den 7 november 1953. Opponenter: docent Lennart Carleson och fil. lic. Christer Lech.

För den analytiska funktionen

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$$

är det uppenbart, att om följden av *avsnittspolynom*

$$P_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n} z^{\nu}$$

betraktas, så är varje punkt på konvergenscirkeln hopningspunkt för nollställen till avsnittspolynomen.

Att detta resultat är giltigt för varje potensserie med ändlig konvergensradie visades 1914 av Jentzsch. Resultatet har sedan skärpts och generaliserats av olika författare. Sålunda visade Szegö 1923, att det alltid finns en delsvit sådan att rötterna till dess polynom har *likafördelade* argument dvs. om antalet nollställen till avsnittspolynomet av graden n i sektorn $\alpha \leqq \arg z < \beta$ betecknas med $N_n(\alpha, \beta)$, så finns det en följd $\{n_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ sådan att

$$N_{n_\nu}(\alpha, \beta)=\frac{\beta-\alpha}{2\pi} n_\nu + o(n_\nu).$$

Ett lämpligt hjälpmedel för studium av likafördelning i denna mening utgör en sats av Erdös och Turán från 1950 (Annals of Math. *51*, 105).

Satser motsvarande Jentzschs och Szegös vid potensserier representerande hela funktioner har bevisats av F. Carlson.

Den föreliggande avhandlingen sysslar med karakterisering av de nollställefördelningar, som visat sig intressanta vid de ovannämnda undersökningarna, men vid allmännare sviter av analytiska funktioner än avsnittspolynom till potensserier. I samband härmed återföres Erdös-Turáns sats på en enkel sats om konjugerade harmoniska funktioner. En generalisering till exponentialpolynom behandlas även. Avslutningskapitlet ägnas åt ett problem, som har ett visst samband med de föregående och som bl. a. behandlats av J. Korevaar i en dissertation 1949: Vilka villkor måste läggas på nollställena till en polynomföljd för att konvergens i något område skall medföra konvergens i hela planet dvs. mot en hel funktion?

MAGNUS MATELL, *Stereochemical studies on plant growth substances*, Uppsala 1953, sammanfattning av åtta uppsatser i Arkiv för Kemi. Disp. i Uppsala den 10 oktober 1953. Opponenter: docent SIGVARD WIDEQVIST och fil. lic. JERKER PORATH.

Förutom det i växter förekommande tillväxtämnet heteroauxin (3-indolättiksyra) känner man ett stort antal syntetiska tillväxtämnen med likartad växtfysiologisk verkan. Speciellt inom gruppen aryloxiättiksyror återfinnes många föreningar med hög växtfysiologisk aktivitet. De homologa α-aryloxialkylkarbonsyrorna, som har en asymmetrisk kolatom och alltså i princip är spaltbara i optiska antipoder, har likartad biologisk verkan.

I avhandlingen beskrives den optiska spaltningen av ett 15-tal α-aryloxialkylkarbonsyror, α-naftylsulfid- och α-naftylmetylpropionsyror. Spaltningarna har i regel utförts med konventionella baser. I ett par fall har dock en ny bas, nämligen optiskt aktiv β-fenylisopropylamin, kommit till användning. Denna bas har i många fall visat sig överlägsen de hittills använda baserna.

De optiskt aktiva syrorna har undersökts växtfysiologiskt av laborator Börje Åberg. Som regel har mot varandra svarande antipoder högst olika växtfysiologisk aktivitet och skillnader på upp till 4000 ggr. har konstaterats.

De aktuella föreningarnas konfiguration har bestämts med hjälp av olika metoder, i främsta rummet kvasi-racematmetoden. För preliminära undersökningar användes den Koflerska kontaktmetoden och på grundval av de därvid vunna resultaten upptogs erforderliga smältpunktsdiagram. Dessutom har preparativa och optiska metoder kommit till användning varigenom i många fall konfigurationsbestämningarna kunnat verifieras på olika vägar. En av Winther angiven regel, som ibland använts för härledning av steriska samband, har visats vara otillförlitlig. Betingelserna för bildningen av kvasiracemiska föreningar diskuteras.

Konfigurationsbestämningarna visar att de optiskt aktiva tillväxtämnen, som har högre växtfysiologisk aktivitet än resp. antipoder, har samma konfiguration som D-glycerinaldehyd. Ett annat resultat av undersökningarna är att det steriska sambandet mellan optiskt aktiv mjölksyra och α-alanin bestämts på ett nytt sätt.

Den optiska aktiviteten har bestämts i olika lösningsmedel. Löslighet och dissociationskonstanter har bestämts för flertalet av de aktuella föreningarna.

Avslutningsvis diskuteras vissa samband mellan kemisk struktur och växtfysiologisk aktivitet.

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

1916) *Undersök hur rötterna till ekvationen* $(x^2-x\,\mathrm{tg}\,v)^2+x^2-1:\cos^6 v=0$ *fördela sig på intervallen* $-\infty\leftrightarrow 0$, $0\leftrightarrow \mathrm{tg}\,v$, $\mathrm{tg}\,v\leftrightarrow+\infty$, *då* v *är en spetsig vinkel.* *X.*

1917) *En kubisk parabel tangerar alla sidor i parallellogrammen ABCD, AB och CD i A resp. C. Hur förhålla sig areorna av de stycken, i vilka kurvan uppdelar parallellogrammen?* *X.*

1918) *Sök en 8-siffrig heltalskvadrat, i vilken var och en av siffrorna 2, ..., 8 förekommer.* *V. Thébault*

Enklare matematiska uppgifter[2]

1919) En triangels största vinkel är 90° större än den minsta. Sidornas mätetal bilda en aritmetisk serie. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: 24,29°, 41,42° och 114,29°.

1920) I triangeln ABC är vinkeln A 45° och vinkeln B 22,5°. En linje från A träffar BC i D så, att vinkeln ADC är 30°. Visa att sträckan D är exakt lika med sidan BC.

1921) Kring en sfär med radien r omskrivas två raka cirkulära koner med lika volymer men med olika stora höjder h_1 och h_2. Visa, att $1:h_1+1:h_2=1:2r$.

1922) Ett flygplan går parallellt med en meridiancirkel på den konstanta höjden 1 km över jordytan, som antas vara en klotyta med radien 637 mil, och passerar härvid rätt över en person, som observerar planet från en punkt belägen 1 m över marken. Hur lång sträcka av planets bana skulle kunna observeras, om sikten vore fri och man kunde bortse från ljusets brytning och försvagning i atmosfären?

Svar: 233 km. — Ledning: $\cos\alpha=1-\frac{1}{2}\alpha^2$ för små vinklar.

1923) Ett ogenomskinligt homogent klot med 30 cm radie ligger på en horisontella ändytan av en vertikal cylindrisk pelare med 39 cm radie och belyses av den i zenit stående solen. Om klotet flyttas ut mot periferin, kommer slutligen ytan av dess skugga på det horisontella underlaget att uppnå ett visst minsta värde. Beräkna detta.

Svar: 1180 cm².

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm Ö.

[2] Uppg. 1919—1921, 1926—1929 äro insända av *B—r.*; 1922—1925 av *Edqvist.*

1924) Till funktionen $y=(x^2+ax):(2x+7)$, där $a \neq 0$, sökes det numeriskt minsta heltalsvärde på a, som ger heltalsvärden åt koordinaterna för funktionskurvans maximi- och minimipunkter.

Svar: $a=-28$.

1925) En flod är 400 m bred. En person står på vattenytans nivå i en punkt belägen 200 m från närmaste strand. Om han höjer sig lodrätt över denna punkt, kommer han att i ett visst ögonblick se flodens bredd under maximal synvinkel. Sök denna.

Svar: 30°.

1926) Genom ekvationen $y=ax(y^2+1)$ är y bestämd som funktion av x. Bestäm värdet på konstanten a så, att denna funktion satisfierar ekvationen $4(x^2-1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y^2+1)^2=0$.

Svar: $a=\pm 0{,}5$.

1927) En triangel har ett hörn i första kvadranten, ett på negativa x-axeln och ett på negativa y-axeln. De delar av dess yta, som ligga i andra, tredje och fjärde kvadranterna, äro resp, 3, 6 och 4 ytenheter. Hur stor är den del av ytan, som ligger i första kvadranten? Vad blir svaret, om ytorna äro α, β och γ ytenheter?

Svar: 9,5 resp. $\alpha\gamma(\alpha+2\beta+\gamma):(\beta^2-\alpha\gamma)$ ytenheter. Villkor: $\beta^2>\alpha\gamma$.

1928) En ellips, vars storaxel utgör den ena parametern i en hyperbel, går genom hyperbelns ena vertex och tangerar dess asymptoter. Beräkna kurvornas excentriciteter.

Svar: $\frac{1}{3}\sqrt{8}$ och 2.

1929) En parabel med vertex O och parametern AB skäres av en cirkel i punkterna O och A. Visa, att om denna cirkel skär parabeln även i C och D, så är CD parallell med OB. Allmänt gäller: Om a är en symmetriaxel till ett kägelsnitt, på vilket A, B, C, D äro fyra koncykliska punkter, så är a parallell med en av bisektriserna till vinklarna mellan AB och CD.

Lösn. till uppg. 1876—1878.

1876) *Sidoytorna BCD, CDA, DAB, ABC i en tetraeder T ha tyngdpunkterna A_1, B_1, C_1, D_1 resp. Tetraederns tyngdpunkt är G. På analogt sätt äro A_2, B_2, C_2, D_2 tyngdpunkter för sidoytorna i tetraedern $A_1B_1C_1D_1$ ...; A_n, B_n, C_n, D_n tyngdpunkterna för sidoytorna i tetraedern $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$. Om P är en godtycklig punkt, skall likheten $PA_n^2+PB_n^2+PC_n^2+PD_n^2=4PG^2+S:4\cdot 9^n$ bevisas, där S är summan av kanternas kvadrater i tetraedern T.* V. *Thébault.*

För tetraedern $A_1B_1C_1D_1$ fås med iakttagande av att $\Sigma\overline{PA}=4\overline{PG}$ relationen $3\overline{PA_1}=4\overline{PG}-\overline{PA}$, etc. Härav: 1) $3\Sigma\overline{PA_1}=16\overline{PG}-4\overline{PG}=3\Sigma\overline{PA}$, alltså $G\equiv G_1\equiv G_2=\ldots$. 2) $3(\overline{PA_1}-\overline{PG})=-(\overline{PA}-\overline{PG})$, etc., som med stöd av 1) ger $(-3)^n(\overline{PA}_n-\overline{PG})=\overline{PA}-\overline{PG}$, etc. Vid skalär kvadrering och summation leda dessa likheter till $\Sigma PA_n^2-8PG^2+4PG^2=$ $=9^{-n}(\Sigma PA^2-(\Sigma\overline{PA})^2:4)=\Sigma(\overline{PA}-\overline{PB})^2:4\cdot 9^n=S:4\cdot 9^n$. *X.*

Utan vektorbeteckning: Om mittpunkterna av AB och CD äro M resp. N, erhålles ur triangeln APB: $PA^2+PB^2=\frac{1}{2}AB^2+2PM^2$, varav genom addition $3\Sigma PA^2=\frac{1}{2}S+2\Sigma PM^2$. Ur triangeln MPN fås $PM^2+PN^2=$ $=\frac{1}{2}MN^2+2PG^2$ och $\Sigma PM^2=\frac{1}{2}\Sigma MN^2+6PG^2$. Således är $3\Sigma PA^2=\frac{1}{2}S+$ $+\Sigma MN^2+12PG^2=\frac{1}{2}S+\frac{1}{4}S+12PG^2$, (Elementa, årg. 6, sid. 149), dvs. $\Sigma PA^2=\frac{1}{4}S+4PG^2$. Av en figur framgår, att varje följande tetraeder har kantlängder, som äro $\frac{1}{3}$ av närmast föregående samt att $G\equiv G_1\equiv G_2$ ... Härav den begärda relationen. *S. B.*

Även löst av *R. Johnsson, J. A. Sandelin, B. Nordman.*

1877) *Sidorna BC, AC, AB i en triangel ABC äro baser i tre likbenta likformiga trianglar med spetsarna A_1, B_1, C_1. De två sista äro båda vända utåt (inåt), den första inåt (utåt). Visa, att punkterna A, A_1, B_1, C_1 i allmänhet äro hörn i en parallellogram.* *X.*

1. Trianglarna B_1A_1C, C_1BA_1 och ABC äro direkt likformiga enligt första likformighetsfallet och förutsättningen om de likbenta trianglarnas orientering. Betecknas basvinkeln i dessa v, kan man vid en vridning v åt lämpligt håll (omkring en punkt v. s. h. i planet) av triangeln B_1A_1C och linjen AC_1 ernå att i det nya läget $C'B_1'$, $B_1'A_1'$ bli parallella med sina motsvarande sidor CA och AB samt dessutom att $A'C_1'$ blir parallell med AB. Alltså är B_1A_1 parallell med AC_1 och p. s. s. C_1A_1 parallell med AB_1.

2. Låt de till A_1B_1C hörande talen i Gauss' talplan vara 0, β, γ. För ett lämpligt reellt tal k fås $z_{B_1}=\frac{1}{2}\gamma(1+ki)$, $z_{C_1}=\frac{1}{2}\beta(1-ki)$, $z_{A_1}=\beta+\frac{1}{2}(\beta-\gamma)(1+ki)=z_{B_1}+z_{C_1}$, varav satsen. *X.*

Även löst av *B. Estberger, R. Johnsson, Y. Metsänkylä, J. A. Sandelin, H. Simonsson, I. Gunsjö, B. Nordman, N. G. Sjöstrand.*

1878) *Beräkna* $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\ldots$ *och* $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\ldots$

I. Gunsjö.

Emedan potenssumman $\varepsilon_0^p+\ldots+\varepsilon_{k-1}^p$ av rötterna $\varepsilon_r=e^{2\pi ir:k}$, $r=0,$ $1,\ldots,$ $k-1$, till ekvationen $z^k-1=0$ har värdet k för $p\equiv 0 \pmod k$ men eljes försvinner, får man

$$k\sum_0^{k-1}(s)\binom{n}{sk}=\sum_0^{k-1}(r)\left(1+\varepsilon_r\right)^n=2^n\sum_0^{k-1}(r)\cos^n\frac{\pi r}{k}\cdot\cos\frac{\pi nr}{k},$$

ty $1+\varepsilon_r = 1+\cos\frac{2\pi r}{k} + i\sin\frac{2\pi r}{k} = 2\cos^2\frac{\pi r}{k} + 2i\sin\frac{\pi r}{k}\cos\frac{\pi r}{k} = 2\cos\frac{\pi r}{k}\left(\cos\frac{\pi r}{k} + i\right.$

och de imaginära delarna i andra summans termer ta ut varandra. Sammanslås dessutom lika termer i den sista, erhålles

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{k}+\binom{n}{2k}+\ldots = \frac{2^n}{k}\left(1+2\sum_{1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(r)\cos^n\frac{\pi r}{k}\cos\frac{\pi n r}{k}\right) \qquad (1)$$

där $[x]$ betecknar det största hela tal, som ej överstiger x, och $k>1$. Så är

för $k=3$
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\ldots = \frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{\pi n}{3}\right) \qquad (2)$$

och

för $k=4$
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\ldots = \frac{1}{4}\left(2^n+2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{\pi n}{4}\right) \qquad (3)$$

I algebraisk form blir högra ledet av (2) $\frac{1}{3}\left(2^n+2(-1)^n\right)$, $\frac{1}{3}\left(2^n+(-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]}\right)$, $\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]}\right)$, allteftersom $n=3l, 3l+1, 3l+2$ resp. och i (3) fås $2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n}{4}}$, $2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}}\cdot(-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]}$, 2^{n-2}, $2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}}\cdot$ $\cdot(-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]}$, allteftersom $n=4l, 4l+1, 4l+2, 4l+3$ resp.

Anm. 1. Om $k\geqq n$, kan (1) lämpligen användas i omvänd riktning dvs. för sammandragning av högra ledet. Sålunda är för $k=n$ $1+2\sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(r)\cos^n\frac{\pi r}{n}\cos\pi r = 2^{1-n}\cdot n$ och för $n>k$ $1+2\sum_{1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(r)\cos^n\frac{\pi r}{k}\cos\frac{\pi n r}{k} = 2$

Anm. 2. Allmännare är för $0\leqq a<k$

$$k\sum_{0}(s)\binom{n}{a+sk} = 2^n\sum_{0}^{k-1}(r)\cos^n\frac{\pi r}{k}\cos\pi(n-2a)\frac{r}{k},$$

som man finner genom att ersätta $\left(1+\varepsilon_r\right)^n$ med $\left(1+\varepsilon_r\right)^n:\varepsilon_r^a$. Härav fås t. ex. $3\left\{\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\ldots\right\} = 2^n+2\cos\frac{\pi(n-2)}{3}$ och $3\left\{\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\ldots\right\} =$ $= 2^n+2\cos\frac{\pi(n-4)}{3}$, där högra leden kunna »algebraiseras» som ovan.

X.

Även löst av *J. B. Giese, C. G. Granath, H. Simonsson, O. S., R. Johnsson, N. G. Sjöstrand.*

Fyllnadsprövning efter studentexamen

Januari 1954

Matematiska uppgifter för latinlinjen[1]

1. En transversal i en triangel går genom mittpunkten på en sida och delar en annan sida i förhållandet 1 : 2, från den tredje sidan räknat. Sök förhållandet mellan den mindre och den större av de delar, i vilka transversalen delar triangelns yta.
2. Upprita kurvorna $x^2+10x+27-y=0$ och $4x^2+22x+5y=0$. Bestäm medelst diagrammet eller på annat sätt koordinaterna för de punkter, där sammanbindningslinjen mellan kurvornas skärningspunkter skär koordinataxlarna.
3. Från ett flygplan siktas foten och toppen av en radiomast under depressionsvinklarna (djupvinklarna) 8,9° resp. 8,1°. Masten är 63 m hög. Hur stort är avståndet mellan radiomastens fot och den punkt på marken, som vid tillfället i fråga ligger rakt under flygplanet? Markytan kan betraktas som horisontell.
4. En person skall amortera ett lån på 40 000 kr och erbjudes två alternativ. Antingen skall han betala 4000 kr årligen, varvid räntefoten blir 5 %, eller också skall han betala 5000 kr årligen, varvid räntefoten blir 4 %. Amorteringen skall i båda fallen börja ett år efter upptagandet av lånet och inbetalningarna ske med ettåriga intervall. Med hänsyn till att penningvärdet kan komma att sjunka, medan lånet amorteras, önskar han välja den amorteringsplan, som ger den längsta amorteringstiden. Vilket alternativ bör han i så fall välja, och hur många år dröjer det, innan lånet är slutamorterat?
5. I en parallellogram har en diagonal längden 10 cm och bildar en vinkel av 24,7° med ena sidan. Den andra sidan är 5 cm. Beräkna den andra diagonalens längd.

[1] *Allmänna anvisningar för alla examensprov:* Införda beteckningar böra förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Resonemang, lösningar av ekvationer och genomförande av uträkningar böra icke vara så knapphändiga, att de bli svåra att följa. Geometriska uppgifter böra åtföljas av figurer, ritade med blyerts med hjälp av passare och linjal. — För provet i *fysik* tillkommer att enheterna angivas och att konstanter, som ej äro uppgivna i texten, hämtas ur formelsamlingen.

6. Bestäm de a-värden, för vilka de tre ekvationerna i ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+ay=4 \\ 2x-3y=1 \\ (a-5)x+15y=a \end{cases}$$

satisfieras av samma värden på x och y, samt ange lösningarna i de olika fallen.

7. Ytorna av de om- och inskrivna cirklarna till en likbent triangel förhålla sig som 81 : 16. Beräkna triangelns toppvinkel.
8. I en triangel ABC är M mittpunkten på sidan AC. Punkten P ligger på sidan AB, så att $AP=2\,PB$. De räta linjerna BM och CP skär varandra i punkten S. Sammanbindningslinjen AS utdrages, tills den skär sidan BC i punkten N. Slutligen utdrages sammanbindningslinjen MN, tills den skär förlängningen av sidan AB i punkten Q. Bevisa, att $BQ=AB$.

Resultat: 1. 1 : 2. 2. $(-6;\ 0)$ och $(0;\ 12)$. 3. 4,4 km. 4. Det första alternativet, vilket inses omedelbart; 15 år. 5. 5,51 cm eller 15,16 cm. 6. $a_1=-5$; $x=y=-1$ eller $a_2=9$; $x=1$, $y=\frac{1}{3}$. 7. 38,94° eller 83,64°. 8. Drag transversaler från M parallella med CP och AN. Transversalsatsen ger då $CN=2NB$. Drages till sist transversalen BD parallell med AC, så blir $BD=\frac{1}{2}CM=\frac{1}{2}AM$, varav satsen.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Allmän kurs

1. Beräkna summan av alla tresiffriga hela positiva tal, som är jämnt delbara med 17.
2. En rät cirkulär kon är inskriven i en sfär med radien R. Beräkna konens höjd, om dess volym är lika stor som volymen av ett av de båda sfäriska segment, i vilka sfären delas av konens basyta.
3. För att kunna åtaga sig en större beställning måste ett industriföretag göra vissa nyanläggningar, vilka kostnadsberäknas till 900 000 kr. På grund av värdeminskning genom förslitning kan anläggningarna efter tio år beräknas vara värda endast 150 000 kr. Med hur mycket måste den årliga vinsten, beräknad till varje års slut, minst ökas under denna tioårsperiod, för att de planerade anläggningarna inte skall ställa sig ekonomiskt ofördelaktiga? Ränta på ränta beräknas efter 4 %.
4. Triangeln OAB har hörnet O i origo i ett rätvinkligt koordinatsystem, hörnet A på x-axeln och hörnet B i punkten (1; 3). Triangelns tyngdpunkt och den punkt, där triangelns höjd från

O skär medianen från B, delar nämnda median i tre lika stora delar. Sök koordinaterna för hörnet A.

5. Tre rektangulära kort med längden 9 cm och bredden 6 cm ställes på ett plant horisontellt underlag, så att en av de kortare sidorna i vartdera kortet ingår som sida i en regelbunden sexhörning i det nämnda planet och de motstående sidorna bildar en liksidig triangel. Beräkna kortens lutningsvinkel mot planet.
6. I en likbent triangel ligger höjdernas skärningspunkt på den i triangeln inskrivna cirkelns periferi. Beräkna triangelns vinklar.
7. Kurvan $y=f(x)$, där $f(x)$ är ett polynom av tredje graden, har en minimipunkt i $(a; -a)$ och en maximipunkt i $(-a; a)$, där a är en konstant. Visa, att detta är möjligt, endast om $a>0$. Kurvan har en tangent, som går genom minimipunkten utan att tangera kurvan i denna punkt. Sök denna tangents ekvation.
8. Kurvorna $y=x^2$ och $y=ax^2+2x+b$ skär varandra under räta vinklar i två punkter. Bestäm konstanterna a och b samt upprita kurvorna.

Resultat: **1.** 28 832. **2.** $\frac{1}{4}R(1+\sqrt{17})$. **3.** 98 500 kr. **4.** (5; 0) eller (−8; 0). **5.** 67,36°. **6.** 48,19°, 48,19°, 83,62° (sidornas förh. är 3 : 3 : 4). **7.** $9x+8y-a=0$. — Man finner $f(x)=x^3:2a^2-3x:2$. Av $y'=k(x^2-a^2)$ fås $y=k(\frac{1}{3}x^3-a^2x)+k_1$. Insättning av $x=\pm a$, $y=\mp a$ ger $k=3:2a^2$ och $k_1=0$; $f''(a)>0$, osv. **8.** $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$. — Skärningspunkternas abskissor erhållas ur de båda ekv. $ax^2+2x+b-x^2\equiv(a-1)x^2+2x+b=0$ och $2x(2ax+2)+1\equiv 4ax^2+4x+1=0$, som alltså äro identiska. Härav $2:(a-1)=1:a$ och $b:(a-1)=1:4a$.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Specialkurs

1. Under vilka vinklar skär kurvorna $x^2+3y^2=4$ och $3x^2+y^2-4y=0$ varandra?
2. Tangenterna till en hyperbel i de båda parametrarnas ändpunkter bildar en fyrsiding. Hyperbelnormalerna i samma punkter bildar en annan fyrsiding. För en viss hyperbel är den senare fyrsidingens yta fyra gånger så stor som den förras. Bestäm denna hyperbels asymptotvinkel, dvs. en vinkel mellan asymptoterna, inom vilken en hyperbelgren är belägen.
3. Genom ekvationen $\left(\frac{a}{x}\right)^3-\left(\frac{b}{y}\right)^3=1$, där a och b är från 0 skilda konstanter, bestämmes y som funktion av x. Visa, att denna funktion, oberoende av värdena på a och b, satisfierar ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{4}{x}\frac{dy}{dx}=\frac{4}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

4. Kring en sfär med radien r är en regelbunden sexsidig pyramid med minsta möjliga volym omskriven. Beräkna denna pyramids baskant och höjd.
5. Normalen i en punkt A på parabeln $y^2=4x$ skär x-axeln i B. P är skärningspunkten mellan parabeltangenten i A och den räta linje genom B, som är parallell med y-axeln. Sök orten för P, och upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, om man visar, att ortkurvan har den givna parabeln till asymptotkurva, dvs. obegränsat närmar sig densamma, när punkten A rycker allt längre bort.
6. AB är diametern i en given halvcirkel med medelpunkten O och radien 1 dm. P är en punkt på halvcirkelbågen och Q mittpunkten på bågen PB. Normalerna genom P och Q mot diametern AB träffar denna i punkterna R och S resp. Den yta, som begränsas av cirkelbågen PQ och sträckorna QS, SR och RP, är en funktion av vinkeln POB. Ange denna funktion, bestäm dess eventuella maximi- och minimivärden och upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag.
7. Diskutera utseendet av kurvan $y=(x^4+ax^2-3):x^3$ för olika värden på konstanten a. Undersök därvid skärningspunkter med koordinataxlarna, asymptoter och kurvans skärningspunkter med dessa, kurvans läge i förhållande till asymptoterna samt maximi- och minimipunkter. Åskådliggör i olika koordinatsystem de olika typer av kurvor, som kan förekomma. — Undersökning av kurvans inflexionspunkter erfordras inte men betraktas som en förtjänst.

Resultat: **1.** 90° (Den ena ellipsen övergår i den andra vid vridning kring en skärningspunkt). **2.** 74,93° ($\cos v=\sqrt[3]{2}-1$). **4.** Baskanten $2r\sqrt{6}:3$ och höjden $4r$. — Utan deriväträkning: Utdragas i den 6-sidiga pyramiden basytan och varannan sidoyta, erhålles en omskriven regelb. 3-sidig pyramid (tetraeder) med samma höjd, 3 ggr så lång baskant och $1\frac{1}{2}$ ggr så stor volym som den 6-sidiga. Det är evident, att tetraederns volym är min. i det reguljära fallet. **5.** Ortens ekv. är $y^2=4x+4:(x-2)$, två grenar ($x>2$), symmetriska m. a. p. x-axeln. I grenen i första kvadranten avtar y från $+\infty$ för $x=2$ till min. 4 för $x=3$ för att sedan med växande x gå mot $+\infty$, varvid den asymptotiskt närmar sig parabeln. **6.** $y=\frac{1}{4}(x-\sin 2x+\sin x)$ dm², där $x=\sphericalangle POB$. Funktionen växer från värdet 0 för $x=0$ till max. 1,018 för $x=2{,}419$ ($\cos x=-0{,}75$) och avtar sedan till gränsmin. $\frac{1}{4}\pi$ för $x=\pi$. **7.** Asymptoter $y=x$; $x=0$. Då origo är centrum, betrakta vi kurvan för $x>0$. Den skär alltid x-axeln i *en* punkt och asymptoten i punkten $x=y=\sqrt{3}:a$, om $a>0$. Av $y'=[(2x^2-a)^2+36-a^2]:4x^4$ erhålles ett max.

och ett min., om $x>6$ samt inflexion med vågrät tangent, om $a=6$. Av $y''=2(ax^2-18):x^5$ erhålles inflexion för $x=\sqrt{18:a}$, om $a>0$.

I. $a\leqq 0$. Kurvan stiger från $(0;\ -\infty)$ och närmar sig den sneda asymptoten underifrån. II. $6>a>0$. Kurvan stiger från $(0;\ -\infty)$, skär den sneda asymptoten, når ett maximiavstånd från denna $(x=\sqrt{9:a})$ och närmar sig den åter. III. $a=6$ och $a>6$ se ovan.

Uppgifter i fysik

1. En horisontell stav roterar med konstant hastighet kring en vertikal axel. I en punkt på stavens undersida, 12,0 cm från axeln, är en 16,0 cm lång tråd fästad, i vars nedre ända en liten kula är upphängd. På grund av rotationen beskriver kulan en cirkelformig bana. Hur många varv i minuten tillryggalägger kulan, då dess avstånd från axeln är 20,0 cm? Upphängningstråden förutsättes vara otänjbar. Från luftmotståndet mot kulans rörelse bortses. Enkel figur erfordras.
2. En homogen, rät och cirkulär cylinder med bottenradien r är delad i två hälfter av ett plant snitt genom cylinderaxeln. En av dessa hälfter lägges med den buktiga ytan nedåt på ett lutande plan, vars lutningsvinkel är 10°. Beröringslinjen mellan kroppen och planet är därvid horisontell, och kroppen varken välter eller glider. Beräkna snittplanets vinkel med horisontalplanet. En halvcylinders tyngdpunkt ligger på avståndet $4r:3\pi$ från axeln. Enkel figur erfordras.
3. Ett homogent, jämntjockt och fullkomligt böjligt rep ligger med sin ena hälft rakt utsträckt på ett horisontellt, högt bord, under det att den andra hälften hänger fritt och lodrätt ned genom ett i bordet befintligt hål, vars diameter är något större än repets. Repet hålles till en början i detta läge men släppes sedan utan begynnelsehastighet. Hur stor är repets hastighet, då dess sista del just lämnat bordsytan? Repets längd är 100 cm. Från friktion bortses. Enkel figur erfordras.
4. En ihålig, tunnväggig, sfärisk kula med en liten cirkelrund öppning är försilvrad på insidan. Ett parallellt ljusknippe infaller genom öppningen, så att strålarna äro parallella med den linje, som förenar öppningens mittpunkt och sfärens medelpunkt. Hur stor del av det infallande ljusflödet kastas därvid åter ut genom öppningen? Vid reflexionen absorberas 10 % av det infallande ljuset i silverskiktet. Ingen hänsyn behöver tagas till det ljus, som passerar genom öppningen efter mer än en reflexion mot kulans insida. Enkel figur med strålgång erfordras.

5. En avlägsen byggnad avbildas på en skärm genom en samlingslins med brännvidden 100 cm. Man önskar göra bildens dimensioner fyra gånger så stora. För den skull inskjutes mellan linsen och skärmen en spridningslins med brännvidden 20 cm, och skärmen flyttas, till dess en skarp bild erhålles på densamma. Hur nära intill samlingslinsen skall denna senare lins placeras? Linserna ha sammanfallande optiska huvudaxlar och få betraktas som tunna. Bildkonstruktion erfordras.
6. För att bestämma brytningsexponenten för en vätska förfor man på följande sätt. En tunn, bikonvex lins av en glassort med obekant brytningsexponent lades på en plan, horisontell metallspegel. Utefter den gemensamma, vertikala huvudaxeln kunde en liten horisontell, belyst glasskala förflyttas. Om vätskan göts över spegeln, så att mellanrummet mellan spegeln och linsen nätt och jämnt fylldes därav, och avståndet mellan linsen och skalan var 340 mm, föll bilden av skalan på skalan själv. Ersattes vätskan med vatten, blev motsvarande avstånd 160 mm, och då mellanrummet endast utgjordes av luft, blev avståndet 100 mm. Beräkna härav vätskans brytningsexponent. Vattnets brytningsexponent är 1,33. Enkel figur med strålgång erfordras. Föremålet kan därvid betraktas som punktformigt.
7. En shuntlindad likströmsmotor, ansluten till 220 volts nätspänning, förbrukar vid full belastning 20,5 A. Shuntledningens motstånd är 440 ohm, ankarledningens 0,50 ohm. Friktions- och järnförlusterna uppgå till 240 W. Beräkna den för nyttigt arbete disponibla effekten. Enkelt kopplingsschema med strömriktningar angivna erfordras.
8. I ett elektronrör är avståndet mellan katod och anod 5,0 mm. Den på röret lagda spänningen är 150 V (likström). Hur lång tid skulle det ta för elektronerna att tillryggalägga denna väg, om man antager, att deras starthastighet är noll och att deras rörelse är rätlinig och likformigt accelererad? Elektronens massa är $9{,}1 \cdot 10^{-28}$ g, dess laddning $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ coulomb. 1 joule$=10^7$ erg.

Resultat: 1. 50,8 varv per min. 2. 24,2°. 3. 2,71 m/sek. 4. 10 %. 5. 85 cm. 6. 1,62. 7. 3,96 kW. 8. $1{,}38 \cdot 10^{-9}$ sek.

Rättelse: rad 4 uppifrån i sept.h. 1953, s. 220 och i »Problemhäfte 1953», s. 24 skall stå: 4. 1075.

Tidskrifter

Populär astronomisk tidskrift, Stockholm 1953: 3—4.

Ur innehållet: J. RAMBERG, Den totala solförmörkelsen den 30 juni 1954; Vid Stockholms Observatoriums 200-årsfest i Saltsjöbaden: prof. B. LINDBLAD, »Observatoriets utveckling och verksamhet» och Sir HAROLD SPENCER JONES, Greenwich, »Internationellt samarbete inom astronomien»; V. R. ÖLANDER, Några synpunkter på problemet att bestämma jordens form; F. E. WICKMAN, Hur man sökt bestämma jordens ålder; N. V. E. NORDENMARK, Stjärneborg.

Ljuskultur, Stockholm 1953: 3—4.

Ur innehållet: G. VON BAHR, Ögat, synen och belysningen; Färgegenskaper hos nyare svenska lysrörstyper; Bländningsstudiernas tillämpning på skolornas belysning; Lysrörsbelysning för skolsalar.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1953: 4.

Ur innehållet: P. NAUR, Solens og stjernernes energi; T. ELVIUS, Stockholms Observatorium 200 år; E. HØG, Det nye observatorium i Brorfelde; JULIE M. VINTER HANSEN, Kometerne.

Nordisk Matematisk Tidskrift, Oslo 1953: 2—3.

Ur innehållet: FR. LANGE-NIELSEN, N. H. Abel; V. BRUN, Det gjenfunne manuskript til Abels Parisavhandling; R. NEVANLINNA, Den fyrdimensionala rymden; E. FØLNER, Elementer af von Neumann's spilteori. Litteratur. Oppgaver.

Fra Fysikkens Verden, Oslo, årg. 15: 2—3.

Ur innehållet: B. EDLÉN, Något om fysikens nuvarande läge (forts.); ELLEN GLEDITSCH, Det periodiske system, fra Mendeléeff til Moseley; E. HYLLERAAS, Nobelprisen i fysikk 1953; S. ORE, Nobelprisen i kjemi 1953; H. RÅSTAD, Dobbeltstråleoscillografen i undervisningen; H. TREFALL, Nytt om mesoner og elementarpartikler; T. RASMUSSEN, Kule kontra vogn ved skråplanforsøk i realgymnasiet.

Naturen, Bergen 1953: 15—18.

Ur innehållet: CHR. OFTEDAHL, Månens dannelse; N. HERLOFSON, Stjerneskuddenes fysikk; J. HALD, Om Antabusvirkning; M. E. DANIELSEN, Litt om vaskemidlers virkning; H. PETERSEN, Fotografi av et kuglelyn; R. GULDAL, Astronomiske begivenheder i 1952.

Science Progress, London 1954: January.

Ur innehållet: Elements, old and new; Hybrids and evolution in flowering plants; The new counters; The ecological significance of diurnal rhythms in terrestrial Arthropods. Recent advances in science: Astronomy, Physics, Meteorology, Organic Chemistry, Geology, Botany. Ett stort antal bokanmälningar.

Discovery, London 1953: December; 1954: January.

Ur innehållet: The 1953 Nobel Prizes; William Gilbert's Centenary; Mistletoe, its life and legends; Harnessing the wind; Unicellular algae as a source of food; Fifty years of powered flight; Structure and function of DNA; The new scale of space; Electricity generation in thunderstorms. Ett stort antal notiser under rubriken »Progress of Science».

Insänd litteratur

John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, London 1953:
NORMAN F. RAMSEY, *Nuclear Moments.* Pp. 169, $ 5.00.
R. E. PETERSON, *Stress Concentration Design Factors.* Pp. 155, $ 8.50.
S. E. LURIA, *General Virology.* Pp. 427, $ 8.80.
A. V. SEYBOLT—J. E. BURKE, *Experimental Metallurgy.* Pp. 340, $ 7.00.
H. D. BAKER—E. A. RYDER—N. H. BAKER, *Temperature Measurement in Engineering Vol. I.* Pp. 179, $ 3.75.
Biochemical Preparations, Vol. 3. Editor: E. E. Snell, Pp. 128, $ 3.50.

C. M. FOCHEN, *Dimensional Methods and their Applications.* Edward Arnold, London 1953, Pp. 224, 30 s. net.
N. W. MCLACHLAN, *Complex Variable Theory and Transform Calculus.* Cambridge Univ. Press, Pp. 338, 55 s. net.
A. H. BECK, *Thermionic Valves. Their Theory and Design.* Cambridge Univ. Press 1953, Pp. 570, 60 s. net.
E. J. BOWEN—F. WOKES, *Fluorescence of Solutions.* Longmans, Green & Co., London 1953, Pp. 91, 25 s. net.
J. M. MEEK—J. D. CRAGGS, *Electrical Breakdown of Gases.* Oxford at the Clarendon Press 1953, Geoffrey Cumberledge, Pp. 507, 60 s. net.
H. MILLOUX, *Principes. Méthodes générales,* I: 1. I serien: G. Julia: Traité de théorie des fonctions. Gauthier-Villars, Paris 1953, 300 p., 4500 fr.
GASTON JULIA, *Cours de géométrie infinitésimale.* I. Vecteurs et tenseurs. Gauthier-Villars, Paris 1953, 103 p., 2000 fr.
Mme M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis.* Gauthier-Villars, Paris 1953, 385 p., 5500 fr.
R. GARNIER, *Cours de cinématique.* Tome I. Cinématique du point et du solide. Gauthier-Villars, Paris 1953, 244 p., 4000 fr.
KARL MENGER, *Géométrie générale.* Gauthier-Villars, Paris 1954, 81 p., 1000 fr.
W. J. TRJITZINSKY, *Les problèmes de totalisation se rattachant aux laplaciens non sommables.* Gauthier-Villars, Paris 1954, 92 p., 1400 fr.
A. BLANC-LAPIERRE, R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires.* Masson & Cie, Paris 1953, 693 p., cartonné toile 6500 fr.
L. MORET, *Manuel de paléontologie animale.* Masson & Cie, Paris 1953, 2800 fr.
Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles 11—14 mars 1953. Masson & Cie, Paris; Thone, Liége, 1953, 114 p., 1800 fr. français.
ANDRÉ DELACHET, *La résistance des matériaux.* (»Que sais-je?» No. 599). Presses Universitaires de France, Paris 1953, 127 p.
J. E. HOFMANN, *Geschichte der Mathematik I.* (Sammlung Göschen Bd 226). W. De Gruyter & Co., Berlin 1953, 220 S., DM 2.40.
STIG HJALMARS, *Teoretisk fysik.* Almqvist & Wiksells Akad. Handböcker, Stockholm 1954, 255 s., kr. 28:—.
T. WILNER, *Tekniska Museets Atomarium.* Tekniska Museet, Stockholm 1953, 21 s.
C. J. LEBEL, *Magnetisk inspelning på band och tråd.* Övers. Nordisk Rotogravyr, Stockholm 1953, 62 s., kr. 4:50.
B. WAHLSTRÖM, *Studentuppg. i matematik.* Specialkurs, jan. 1949—vt. 1953. Sv. Bokförlaget, Stockholm 1953, 35 s., kr. 22:25.
HEDSTRÖM—ÖIJE, *Matematikuppg. i realexamen v. t. 1907—v. t. 1953.* Sv. Bokförlaget, Stockholm 1953, 101 s., kr. 1:35.

aborationer i kemi

Laborationsövningar i kemi för realskolan

Oorganisk kemi. Av *Gunnar Almkvist* och *Walter Ekman*. I uppläggning och till format som *Almkvist — Knave*, Laborationer i fysik. Utkommer till höstterminens början.

Organisk kemi jämte några fristående övningar. Av *Joh. A. Joh:son Inghe* och *Walter Ekman*. Ill. 1951. 48 s. Pbd 2 kr. 50 öre. Godkänd av Läroboksnämnden.

Beställ lärarexemplar med 25 % rabatt

»För många lärare växa de skriftliga arbetena varje vecka till högar, som han omöjligt kan klara, om han samvetsgrant skall rätta dem..... Det bör stå läraren fritt att använda färdiggjorda »protokoll» med ifyllnadssvar. Om de äro väl utförda, kunna de nämligen skapa självständigt arbetande elever.»

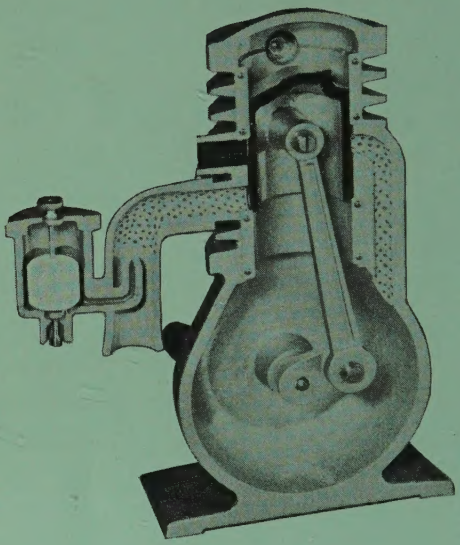
Ur lektor L. O. Öhmans berättelse över sin verksamhet som ämneskonsulent vårterminen 1953. (Aktuellt från S. Ö. nr 30.)

SVENSKA BOKFÖRLAGET

KOLBOKCENTRALEN
David Bagares gata 20 · Stockholm
Tel. 23 69 80 · Postgiro 551 60
Utställning även Parkgatan 19, Göteborg

Utställning
Lärarexemplar
Rekvisitioner
Hamngatan 4, Malmö

PHYWE



Fysikmateriel
av PHYWEs originaltillverkning
levereras av

P. A. NORSTEDT & SÖNER
Skolavdelningen Box 898 Stockholm
Parkgatan 19 Göteborg Hamngatan 4 Malmö

Lund 1954, Håkan Ohlssons Boktryckeri